

---

# RÉSULTAT NÉGATIF EN THÉORIE D'APPROXIMATION DE COMPACTS FONCTIONNELS PAR DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES ET APPLICATION À UN PROBLÈME INVERSE

par

Amadeo Irigoyen

---

## Résumé. —

Dans la théorie d'approximation figurent en particulier les problèmes d'approximation de compacts dans les espaces fonctionnels, par des familles non linéaires : on rappelle le cas de la paramétrisation polynomiale, puis on s'intéressera au cas analytique. On montre un résultat négatif qui dit qu'une famille de fonctions paramétrée analytiquement par  $N$  variables ne peut pas approximer le compact  $\Lambda_l(I^s)$  mieux que de l'ordre de  $(N \log N)^{-\frac{1}{s}}$ , lorsque  $N$  augmente.

Cette assertion fournit, comme application à un problème inverse dans la théorie de Sturm-Liouville, une réponse à une question sur la meilleure reconstruction possible du potentiel  $Q$ , négatif avec  $m + 1$  dérivées intégrables, à partir des valeurs propres et valeurs caractéristiques de l'équation  $-y'' + \omega^2 Qy = \lambda y$ , lorsque  $\omega$  augmente : on montre l'impossibilité d'avoir une formule analytique d'approximation qui puisse avoir une précision meilleure que de l'ordre de  $(\omega \log \omega)^{-(m+1)}$ . Il existe en outre dans [5] des formules d'approximation presque optimales.

## Abstract. —

In the theory of approximation there are some problems on approximation of compacts in functional spaces by nonlinear families : first we deal with the polynomial case, and then we consider the analytic case. We demonstrate a negative result in which we claim that an analytic family of functions with  $N$  parameters can not approach the compact  $\Lambda_l(I^s)$  closer than of order  $(N \log N)^{-\frac{1}{s}}$ , when  $N$  increases.

As applied to an inverse problem in Sturm-Liouville theory, this assertion provides an answer to a question about the best possible reconstruction of the negative potential  $Q$  with  $m + 1$  integrable derivatives, from its eigenvalues and characteristic values of the equation  $-y'' + \omega^2 Qy = \lambda y$ , when  $\omega$  increases : we show that it is impossible to get an analytic approximating formula with precision better than of order  $(\omega \log \omega)^{-(m+1)}$ . Moreover there is in [5] formulas which are almost optimal.

## Table des matières

1. Introduction.....	2
2. Remerciements.....	8
3. Approximation analytique.....	8

4. Théorème de Vitushkin par la méthode de Warren.....	23
5. Application à un problème inverse.....	32
6. Autres méthodes.....	49
Références.....	53

## 1. Introduction

On s'intéresse ici à un problème d'approximation de compacts dans certains espaces fonctionnels par des sous-espaces non linéaires. Cette théorie est liée à l'étude d'entropie d'un compact dans un espace vectoriel normé, concept défini par Kolmogorov comme étant le logarithme du nombre minimal de boules de rayon  $\varepsilon$  pour recouvrir un compact  $K$ . Cette notion donne une idée de la possibilité ou de la difficulté d'approximer un compact par un ensemble donné (cf [8], [11] et [19]).

Si  $K$  est un compact d'un espace vectoriel normé  $L$ , et  $F$  un sous-ensemble de  $L$ , on pose

$$D(K, F) = \sup_{y \in K} \inf_{z \in F} \|y - z\|$$

qui représente le défaut d'approximation de  $K$  par  $F$ . Les cas les plus étudiés sont ceux où  $L$  désigne un espace de fonctions continues ou intégrables sur  $I^s$  et  $K = \Lambda_{l,s}$  désigne la boule unité des fonctions de classe  $C^l$ ,  $l > 0$  sur  $I^s$ , ou encore la boule unité des restrictions de fonctions analytiques bornées sur un voisinage de  $I^s$  dans  $\mathbb{C}^s$ .

Un des principaux exemples est celui de l'approximation linéaire, c'est-à-dire par des sous-espaces vectoriels de dimension finie. Si  $n$  est un entier  $\geq 1$ , on pose

$$D_n(K) = \inf_{F_n} D(K, F_n),$$

où  $F_n$  parcourt l'ensemble  $\mathcal{L}_n$  des sous-espaces vectoriels de dimension  $n$  de  $L$ .  $D_n(K)$  est appelé  $n$ -width du compact  $K$ . Dans la suite des travaux de Vitushkin (cf [19]), Tihomirov (cf [18]) établit quelques propriétés générales des  $n$ -widths ainsi que des exemples de calcul avec explicitation de  $F_n$  réalisant le minimum (cf [15]).

On en particulier, si  $\Lambda_{l,s}$  désigne la boule unité de  $C^l(I^s) \subset C^0(I^s)$ ,  $I = [0, 1]$ ,

$$\frac{A}{n^{\frac{1}{s}}} \leq D_n(\Lambda_{l,s}) \leq \frac{B}{n^{\frac{1}{s}}},$$

ce qui montre entre autres une minoration, donc un résultat négatif d'approximation.

Dans le cadre non linéaire, Vitushkin considère dans [19] le cas suivant : si  $n$  et  $d$  sont des entiers  $\geq 1$ , on se donne l'ensemble

$$P_{n,d} = \left\{ P(\zeta) = \sum_{|k| \leq d} a_k(\cdot) \zeta^k, \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \right\}, \quad a_k \in C^0(I^s),$$

paramétré polynomialement avec  $n$  variables et de degré  $d$ , et

$$D(K, P_{n,d}) = \sup_{y \in K} \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|y - P(\zeta)\|.$$

On pose finalement

$$D_{n,d}(K) = \inf_{P_{n,d}} D(K, P_{n,d}),$$

où  $P_{n,d}$  parcourt l'ensemble  $\mathcal{P}_{n,d}$  des variétés de  $L$  paramétrées par  $n$  variables indépendantes, polynomialement de degré au plus  $d$ . On a comme résultat principal le théorème de Vitushkin que l'on peut trouver dans [6], [11], [19] et [21] :

$$\frac{A}{(n \log d)^{\frac{1}{s}}} \leq D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \leq \frac{B}{(n \log d)^{\frac{1}{s}}},$$

ce qui est une généralisation du cas linéaire, et montre en particulier qu'augmenter la complexité par le degré n'apportera pas d'amélioration significative. On souligne en particulier des résultats négatifs d'approximation, i.e. des minoration de  $D_{n,d}$ .

Vitushkin a montré cette estimation en utilisant la théorie de *variation of sets*, sans en expliciter les constantes.

Plus tard, Warren a montré ce résultat dans [20], sans utilisation des *variations of sets*, en explicitant les constantes, mais seulement dans des cas particuliers :  $\Lambda_\omega([0, 1])$  dans le cas uniforme (où  $\omega$  est un module de continuité), et  $\Lambda_{\alpha,s}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , dans le cas  $L^1(I^s)$ . La méthode est différente, mais elle utilise comme Vitushkin une estimation du nombre de composantes connexes d'un ensemble algébrique dans  $\mathbb{R}^n$ , de Oleinik et Petrovskii (cf [14]). Ce dernier repose finalement sur le théorème de Bézout : une intersection de  $n$  ensembles algébriques  $\{\zeta \in \mathbb{R}^n, P_j(\zeta) = 0\}$ , où  $\deg P_j = p_j$ , ne peut avoir plus de  $\prod_{j=1}^n p_j$  points, les ensembles de zéros se trouvant en position générique (i.e. les coefficients de ces polynômes étant pris dans un ouvert de Zariski).

Cela permet à Warren d'obtenir l'estimation suivante, écrite en détail dans [20]: si  $P_1, \dots, P_m$  sont des polynômes sur  $\mathbb{R}^n$ , de degré  $\leq d$ , alors le nombre de composantes connexes de l'ensemble

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^n \{P_j(\zeta) = 0\}$$

ne peut dépasser  $\left(\frac{4edm}{n}\right)^n$ . On en déduit ainsi une estimation du nombre de suites  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ ,  $\varepsilon_j = \pm 1$ , prises par la fonction :  $\zeta \in \mathbb{R}^n \mapsto (\text{sgn } P_1(\zeta), \dots, \text{sgn } P_m(\zeta))$ . Il en résulte que si  $K$  possède des fonctions qui oscillent suffisamment, il existera des points où des éléments de  $K$  différeront de l'ensemble polynomial, ce qui permettra d'obtenir une minoration de  $D_{n,d}(K)$ .

Notre premier but est de démontrer le théorème de Vitushkin dans la partie 4, dans le cas général  $\Lambda_{l,s}$  et en explicitant la constante  $A$  :

**Théorème 1.1.** — Soit  $\mathcal{P}_{n,d}$  l'ensemble des familles polynomiales de  $C(I^s)$  (resp.  $L^1(I^s)$ ), i.e. formée des éléments

$$P_{n,d} = \left\{ \sum_{|k| \leq d} c_k \zeta^k, \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

où  $c_k \in C(I^s)$  (resp.  $L^1(I^s)$ ). On a alors

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \geq \frac{C_{l,s}}{(n \log d)^{\frac{1}{s}}}.$$

On donne en outre une estimation des constantes  $C_\infty(l, s)$  et  $C_{L^1}(l, s)$ .

Dans le cadre de la théorie d'approximation non linéaire, figure aussi l'étude d'approximation rationnelle, que l'on peut trouver dans [17] et [19]. Ici aussi, passer du cas polynomial au cas rationnel n'améliore pas essentiellement la précision.

En vue d'applications pour des problèmes inverses, on généralise l'approximation non linéaire sur une classe assez naturelle de fonctions analytiques qui ne sont pas des polynômes, qui est celle des fonctions entières de type exponentiel, i.e. qui vérifient :

$$\forall z \in \mathbb{C}^n, |f(z)| \leq a \exp(b \|z\|_1^d),$$

où  $\|z\|_1 = |z_1| + \dots + |z_n|$ . Ce sera l'objet de la partie 3, où on considère un ensemble paramétré analytiquement par  $N$  variables indépendantes, à valeurs dans  $C(I^s)$ , soit une fonction de la forme

$$f(x, \zeta) = f(x_1, \dots, x_s, \zeta_1, \dots, \zeta_N), \quad x \in I^s, \quad \zeta \in \mathbb{R}^N,$$

où, pour chaque  $\zeta$ ,  $f$  est continue par rapport à  $x$ , et pour chaque  $x \in I^s$ ,  $f$  est entière de type exponentiel par rapport à  $\zeta$ . L'hypothèse du type exponentiel pour  $f$  se réécrit avec  $\|f(\cdot, \zeta)\|_\infty$ . On doit néanmoins adopter une restriction sur le domaine de définition : la variable  $\zeta$  reste dans un compact dont la taille grandit avec  $N$ . Le résultat est alors le suivant :

**Théorème 1.2.** — Soit  $\mathcal{E}_N$  la classe des familles entières de  $C(I^s)$  (resp.  $L^1(I^s)$ ), i.e. de la forme

$$E_N = \{f(\cdot, \zeta) = (x \in I^s \mapsto f(x_1, \dots, x_s, \zeta_1, \dots, \zeta_N)), \quad \zeta \in \mathbb{R}^N, \quad |\zeta_j| \leq BN^r, 1 \leq j \leq N\},$$

où  $f$  est une fonction entière de  $\zeta$  vérifiant

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^N, \|f(\cdot, \zeta)\| \leq Ae^{uN^v} e^{bN^t \|\zeta\|_1^d}.$$

Alors

$$D_N(\Lambda_{l,s}) = \inf_{f \in \mathcal{E}_N} \sup_{h \in \Lambda_{l,s}} \inf_{|\zeta_j| \leq BN^r} \|h - f(\cdot, \zeta)\| \geq \frac{C}{(N \log N)^{\frac{1}{s}}},$$

où  $C = C(l, s, A, u, v, b, t, d, B, r)$ .

Ici aussi, on explicite les constantes  $C_\infty$  et  $C_{L^1}$ .

Pour finir dans le cadre d'approximation par des ensembles analytiques, on a également considéré une classe particulière de fonctions entières de type exponentiel appelées quasipolynômes, et qui sont de la forme

$$P(\zeta_1, \dots, \zeta_n, \exp < a_1, \zeta >, \dots, \exp < a_k, \zeta >),$$

où  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ ,  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $< a_j, \zeta > = a_j^1 \zeta_1 + \dots + a_j^n \zeta_n$ . En utilisant la méthode de Warren, on peut obtenir des résultats négatifs d'approximation de  $\Lambda_{l,s}$  par des familles non linéaires qui sont des quasipolynômes à coefficients dans  $L$  ( $= C(I^s)$  ou

$L^1(I^s)$ ). On a besoin pour cela d'estimations du nombre de racines d'un système de  $n$  quasipolynômes, donc de type Bézout. Khovanskii a pour cela établi dans [7] plusieurs résultats sur les équations de Pfaff, où il a donné des exemples avec estimations explicites : si on considère un système

$$P_1 = \dots = P_p = 0$$

de  $p$  équations quasi-polynomiales en  $\zeta$ , où chaque  $P_j$  est de degré  $m_j$  en les  $n + k$  variables  $\zeta_1, \dots, \zeta_n, y_1, \dots, y_k$ , avec  $y_k = \exp \langle a_k, \zeta \rangle$ , alors le nombre de cellules (à homotopie près) de l'ensemble solution de dimension  $n - p$  sera majoré par

$$2^{\frac{k(k-1)}{2}} m_1 \dots m_p \left( \sum_{j=1}^p m_j + n - p + 1 \right)^{n-p} \left[ (n - p + 1) \left( \sum_{j=1}^p m_j + n - p + 1 \right) - n + p \right]^k,$$

ce qui donnera une estimation du même type pour le nombre de composantes de l'ensemble  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^m \{P_j = 0\}$ , et en particulier le résultat suivant, que l'on prouvera en dernière partie :

**Théorème 1.3.** — Soit  $\mathcal{P}_{n,k,d}$  l'ensemble des familles de  $C(I^s)$  représentées par

$$P_{n,k,d} = \left\{ \sum_{|j| \leq d} c_j \zeta_1^{j_1} \dots \zeta_n^{j_n} e^{j_{n+1} \langle a_1, \zeta \rangle} \dots e^{j_{n+k} \langle a_k, \zeta \rangle}, \zeta \in \mathbb{R}^n \right\},$$

où  $P_{n,k,d}$  est un quasi-polynôme à coefficients  $c_j \in C(I^s)$ , à  $n$  variables  $\zeta_i$ ,  $k$  pseudo-variables  $e^{\langle a_i, \zeta \rangle}$  et de degré total  $d$ . On a alors

$$D_{n,k,d}(\Lambda_{l,s}) := \inf_{P \in \mathcal{P}_{n,k,d}} \sup_{h \in \Lambda_{l,s}} \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|h - P(\zeta)\|_\infty \geq \frac{C_{l,s}}{(k^2 n \log n \log d)^{\frac{l}{s}}}.$$

En outre, la constante  $C_{l,s}$  peut être calculée et vaut

$$\frac{1}{\sqrt{s} 2^{l+1} 38^{\frac{l}{s}} ([l] + 1)^{[l]+1} (4(1+e))^{s([l]+1)}}.$$

Ainsi, une famille quasi-polynomiale de  $C(I^s)$  ne peut pas approcher le compact  $\Lambda_{l,s}$  mieux qu'à l'ordre

$$\frac{1}{(k^2 n \log n \log d)^{\frac{l}{s}}}.$$

Cependant la présence du terme  $k^2$  semble brutale, ce qui donne un résultat négatif relativement faible. En revanche, on n'a ici aucune restriction sur les paramètres  $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{R}$ .

Dans la partie 5 on donne une application du théorème 1.2 à un problème inverse dans la théorie de Sturm-Liouville sur la demi-droite  $\mathbb{R}^+$ . On considère l'équation

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} - \omega^2 Q y = \lambda y,$$

où  $-\omega^2 Q$  est un potentiel strictement négatif et suffisamment régulier,  $\omega$  un paramètre grand : dans notre cas,  $Q$  aura  $m+1$  dérivées localement intégrables et à décroissance

polynomiale. On sait alors que l'opérateur  $-\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 Q$  admet  $N(\omega)$  valeurs propres  $-\xi_j^2$  négatives, avec pour chacune une fonction propre  $\psi_j$  associée vérifiant les conditions aux bords :

$$\psi_j(0) = 0 \text{ et } \int_0^\infty \psi_j^2(x) dx = 1.$$

On pose alors  $C_j = (\psi_j'(0))^2$ , qui est la valeur caractéristique associée à  $\xi_j$ .

Le problème est le suivant : connaissant les valeurs propres  $\xi_j$  et valeurs caractéristiques  $C_j$  de l'équation, il s'agit de reconstruire le potentiel  $-\omega^2 Q$  sur  $\mathbb{R}^+$ . On dispose pour cela de formules plus ou moins explicites (cf [9], avec convergence dans  $L^2$ , et [5]), provenant en particulier des travaux de Gelfand, Levitan, Kohn et Jost (cf [3], [10]). En outre, G. Henkin et N. Novikova, motivés en particulier par Lax et Levermore, donnent dans [5] des estimations sur la vitesse de convergence : si  $Q$  possède  $m+1$  dérivées intégrables, il existe des formules qui l'approximent uniformément sur tout intervalle  $[0, X]$  lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ , avec une vitesse (au moins) de l'ordre de  $\frac{1}{\omega^m}$ .

La question que l'on se pose alors (cf [5], p. 22) est de savoir si on peut améliorer cette approximation, i.e. montrer s'il existe une autre estimation ou bien une autre formule (et si c'est le cas, l'expliciter) qui donne une convergence plus rapide vers le potentiel donné  $-\omega^2 Q$ .

Il y a deux cas que nous traitons, auxquels nous donnons une réponse négative : le premier est celui où  $m = 1$ . On utilise dans [5] une formule d'approximation explicite du type Gelfand-Levitan pour des potentiels avec propriétés énoncées ci-dessus :

$$Q_\omega^0(x) = \frac{2}{\omega^2} \frac{d^2}{dx^2} \ln |\det(W_{s,r})(x)|,$$

où

$$W_{s,r}(x) = \frac{2sh(\xi_r + \xi_s)x}{\xi_r + \xi_s} - (1 - \delta_{s,r}) \frac{2sh(\xi_r - \xi_s)x}{\xi_r - \xi_s} - \delta_{s,r} \left( 2x - \frac{4\xi_j^2}{C_j} \right).$$

Cette formule approxime en primitives tout  $Q$  uniformément sur tout  $[0, X]$ , à la vitesse  $\frac{\ln \omega}{\sqrt{\omega}}$  (mais l'approximation peut être vraisemblablement bien meilleure, de l'ordre de  $\frac{1}{\omega^2}$ ). On remarque que, mis à part le dénominateur de  $Q_\omega^0$  provenant du logarithme,  $\det(W_{s,r}(x))$  est une fonction entière de type exponentiel par rapport à  $(\xi_1, \dots, \xi_N, \frac{1}{C_1}, \dots, \frac{1}{C_N})$ , continue par rapport à  $x$ . On peut donc interpréter  $Q_\omega^0$  comme une famille de fonctions continues paramétrée analytiquement. Pour cela, on peut appliquer notre résultat négatif et le compléter avec le résultat positif de [5]. On obtient :

**Théorème 1.4.** — Soient  $\mathcal{Q}$  la classe des fonctions  $Q$  définies sur  $\mathbb{R}^+$ , strictement positives, à décroissance polynomiale, avec 2 dérivées localement intégrables, et leurs opérateurs associés  $-\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 Q$  ; pour tout  $N(\omega) = O(\omega)$ , soit également  $\psi(x, \zeta)$  une fonction définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^N$ , de classe  $C^1$  par rapport à  $x$  et entière de type

exponentiel par rapport à  $\zeta \in \mathbb{C}^N$ . Alors l'approximation de

$$\int_0^x \mathcal{Q} := \left\{ \left( x \mapsto \int_0^x Q(t) dt \right), Q \in \mathcal{Q} \right\},$$

uniformément sur tout intervalle  $[0, X]$ , par la famille

$$\left\{ \left( x \mapsto \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x, \zeta) \right), \zeta_j = O(\omega^r), \forall j = 1, \dots, N \right\},$$

lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ , ne peut pas être meilleure que de l'ordre de

$$\frac{1}{(\omega \ln \omega)^3}.$$

En outre, un cas d'approximation au moins à l'ordre  $\frac{\ln \omega}{\sqrt{\omega}}$ , est donné par la formule de type Gelfand-Levitan

$$\Psi(x, \zeta) = \det \widetilde{W}_{s,r}(x, \zeta),$$

avec

$$\widetilde{W}_{s,r}(x, \zeta) = \frac{2sh(\zeta_r + \zeta_s)x}{\zeta_r + \zeta_s} - (1 - \delta_{s,r}) \frac{2sh(\zeta_s - \zeta_r)x}{\zeta_s - \zeta_r} - \delta_{s,r}(2x - \exp(\zeta_{r+N})),$$

$s, r = 1, \dots, N(\omega)$ , où  $N(\omega)$  est le nombre de valeurs propres  $\xi_j$  et caractéristiques  $C_j$  de l'opérateur  $-\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 Q$ , dont l'élément optimisant peut être ainsi choisi :

$$\zeta_j(Q) = \xi_j, \text{ et } \zeta_{j+N}(Q) = \ln \frac{4\xi_j^2}{C_j}, \quad j = 1, \dots, N(\omega).$$

On aura besoin pour la démonstration d'établir une estimation des valeurs propres  $\xi_j$  et valeurs caractéristiques  $C_j$ ,  $j = 1, \dots, N(\omega)$ , ainsi que de leurs inverses, à cause de la restriction des paramètres  $\zeta_j$ , nécessaire pour pouvoir appliquer notre résultat négatif. Plus précisément, on montrera la

**Proposition 1.1.** — Si  $q = -\omega^2 Q$  est un potentiel négatif, intégrable de classe  $C^1$  avec  $q'(0) = 0$ , et à décroissance polynomiale, alors pour tous  $\omega$  assez grand et  $j = 1, \dots, N(\omega)$ , on a

$$\frac{1}{a\omega^b} \leq \xi_j \leq a\omega^b, \text{ et } \frac{1}{\alpha \exp(\beta\omega^\gamma)} \leq \frac{4\xi_j^2}{C_j} \leq \alpha \exp(\beta\omega^\gamma).$$

Dans l'autre cas, qui n'est pas complètement fini, il s'agit de formules d'approximation concernant le cas plus général d'un potentiel avec  $m+1$  dérivées, mais pas explicitées, et qui réalisent l'approximation (au moins) à l'ordre

$$\frac{1}{\omega^m}.$$

Ces formules sont cependant, dans le cas où les  $m$  premières dérivées de  $Q$  s'annulent en 0, de la forme

$$Q_\omega(x) = \frac{2}{\omega^2} \left( -\frac{d}{dx} K(x, x) + \frac{d^2}{dx^2} \det T_{j,k}(x) \right),$$

où

$$K(x, x) = K(x, x, q(0)) \text{ et } T_{j,k}(x) = T_{j,k}(x, \xi, C, q(0)).$$

Ce sont donc des formules qui, bien que non explicites, sont des fonctions analytiques en les variables  $\xi, C, q(0) = -\omega^2 Q(0)$ . Ici encore, même si ce n'est pas prouvé, on est très optimiste sur la validité d'un résultat négatif affirmant qu'il n'est pas possible d'approximer  $Q$ , avec des formules du même type, mieux qu'à l'ordre

$$\frac{1}{(\omega \ln \omega)^{m+1}},$$

ce qui montrerait encore une propriété de presque optimalité (mais cette fois, sans formule de reconstruction explicite).

On terminera en dernière partie par quelques discussions sur d'autres méthodes pour obtenir des résultats analogues : on prouvera en particulier le théorème 1.3 sur les familles de quasi-polynômes, et qui utilise les estimations de Khovanskii ; ainsi qu'un autre résultat négatif, qui est une application directe du théorème de Descartes. On constatera alors que le théorème 1.2 donne une meilleure minoration, en plus d'être plus général, malgré la restriction nécessaire sur les paramètres.

## 2. Remerciements

Je remercie G. Henkin pour les idées et discussions enrichissantes sur ce sujet.

## 3. Approximation analytique

**3.1. Enoncé et preuve du théorème.** — On considère le compact  $\Lambda_l(I^s)$ ,  $I = [0, 1]$ ,  $s \in \mathbb{N}^*$ ,  $l > 0$ ,

$$\Lambda_{l,s} = \Lambda_l(I^s) = \left\{ f \in C^l(I^s), \forall j, 0 \leq j \leq m, \left\| f^{(j)} \right\|_{\infty} \leq 1, \left\| f^{(m)} \right\|_{\alpha} \leq 1 \right\},$$

où  $l = m + \alpha$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  ( $m = -[-l] - 1$ ), et

$$\|f\|_{\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^{\alpha}},$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne usuelle.

( $\Lambda_l(I^s)$  est un compact de  $(C^0(I^s), \|\cdot\|_{\infty})$  et de  $(L^1(I^s), \|\cdot\|_1)$ )

**Théorème 1.** — On se donne, pour  $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$ ,

$$f(x, \zeta) = f(x_1, \dots, x_s, \zeta_1, \dots, \zeta_N), \quad x \in I^s, \quad \zeta \in \mathbb{R}^N,$$

où  $f$  est entière par rapport à  $\zeta \in \mathbb{C}^N$ , continue (resp. intégrable) par rapport à  $x \in I^s$ .

On suppose de plus que,

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^N, \|f(\cdot, \zeta)\| \leq A e^{uN^v} e^{bN^t \|\zeta\|_1^d},$$



où  $A, u, v, b, t, d$  sont des réels  $\geq 1$ ,  $\|f(\cdot, \zeta)\| = \|f(\cdot, \zeta)\|_\infty$  (resp.  $\|f(\cdot, \zeta)\|_{L^1}$ ), et  $\|\zeta\|_1 = |\zeta_1| + \dots + |\zeta_N|$ .

Alors on a :  $\exists h \in \Lambda_{l,s}, \forall \zeta \in \mathbb{R}^N, |\zeta_j| \leq BN^r, j = 1, \dots, N$ , avec  $B, r \geq 1$ ,

$$\|h - f(\cdot, \zeta)\|_\infty \geq \frac{C}{\left(N \log_{[2]} N\right)^{\frac{1}{s}}} \quad (\text{resp. } \|h - f(\cdot, \zeta)\|_{L^1} \geq \frac{C}{\left(N \log_{[2]} N\right)^{\frac{1}{s}}}),$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $l, s, A, u, v, b, t, d, B, r$  (mais pas de  $N$ ).

De façon équivalente, si  $\mathcal{E}_N$  désigne la classe des fonctions analytiques du type  $f$  (donc dépendant de  $A, u, v, b, t, d$ ), alors

$$D_N(\Lambda_{l,s}) = \inf_{f \in \mathcal{E}_N} \sup_{h \in \Lambda_{l,s}} \inf_{|\zeta_j| \leq BN^r} \|h - f(\cdot, \zeta)\| \geq \frac{C}{\left(N \log_{[2]} N\right)^{\frac{1}{s}}}.$$

Dans la suite, on notera simplement  $\log$  pour le logarithme binaire  $\log_{[2]}$  ( $\ln$  désignera toujours le logarithme népérien).

*Démonstration.* — On commence par montrer le

**Lemme 1.** — On considère le développement de Taylor de  $f : \forall (x, \zeta) \in I^s \times \mathbb{R}^N$ ,

$$f(x, \zeta) = \sum_{|k| \geq 0} c_k(x) \zeta^k,$$

où  $k$  est le multi-indice  $(k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{N}^N$ ,  $|k| = k_1 + \dots + k_N$  et  $\zeta^k = \zeta_1^{k_1} \dots \zeta_N^{k_N}$ .

Alors on a :  $\forall k \in \mathbb{N}^N$ ,

$$\|c_k(\cdot)\| \leq Ae^{uN^v} \left( \frac{ebdN^{d+t}}{|k|} \right)^{\frac{|k|}{d}},$$

où la norme désigne la norme uniforme ou la norme  $L^1$ .

*Démonstration.* — On commence par remarquer que, pour tout  $k$ , la fonction  $x \mapsto c_k(x)$ , qui donne le coefficient de Taylor du monôme  $\zeta^k$ , est bien définie, que ce soit dans l'espace  $C(I^s)$  ou  $L^1(I^s)$ . En effet, elle est donnée par la formule de Cauchy qui utilise l'holomorphie de  $f$  par rapport à  $\zeta$  :

$$c_k(x) = \frac{1}{(2i\pi)^N} \int_{|\zeta_1|=\dots=|\zeta_N|=R} \frac{f(x, \zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta,$$

où  $R > 0$ ,  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ ,  $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_N$  et  $(k+1) = (k_1+1, \dots, k_N+1)$ .

Pour le cas continu, il s'agit d'une intégrale à paramètre d'une fonction continue par rapport à  $x \in I^s$  ; tandis que pour le cas  $L^1$ , c'est le théorème de Fubini appliqué à la fonction  $f$  sur l'ensemble  $I^s \times (bD(0, R))^N$ , qui permet de définir sur  $I^s$  (presque partout, puis en prolongeant par 0) la fonction  $c_k$ , qui sera alors dans  $L^1(I^s)$ .

On a donc :  $\forall x \in I^s$ ,

$$|c_k(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{|\zeta_j|=R} \frac{|f(x, \zeta)|}{R^{|k|+N}} d\zeta,$$

soit

$$\|c_k\| \leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{|\zeta_j|=R} \frac{Ae^{uN^v} e^{bN^t(|\zeta_1|+\dots+|\zeta_N|)^d}}{R^{|k|+N}} d\zeta = Ae^{uN^v} \frac{e^{bN^{d+t}R^d}}{R^{|k|}}.$$

L'inégalité étant valable pour tout  $R > 0$ , on l'a en particulier pour  $R = R_{min}$  qui minimise le membre de droite. Pour déterminer  $R_{min}$ , on considère la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $R \mapsto \frac{e^{bN^{d+t}R^d}}{R^{|k|}}$ . Cette fonction tend vers  $+\infty$  en 0 et  $+\infty$ , elle admet donc (au moins) un minimum, qui annule sa dérivée, donnée par :

$$R \mapsto \frac{e^{bN^{d+t}R^d}}{R^{|k|}} bN^{d+t} R^{d-1} - |k| \frac{e^{bN^{d+t}R^d}}{R^{|k|+1}} = \frac{e^{bN^{d+t}R^d}}{R^{|k|+1}} (bN^{d+t} R^d - |k|),$$

qui s'annule exactement en  $R = R_{min} = \left(\frac{|k|}{bN^{d+t}}\right)^{\frac{1}{d}}$ .

Par suite, il y a un seul minimum, et on a :

$$\|c_k\| \leq \frac{Ae^{uN^v} e^{bN^{d+t} \frac{|k|}{bN^{d+t}}}}{\left(\frac{|k|}{bN^{d+t}}\right)^{\frac{|k|}{d}}} = Ae^{uN^v} \left(\frac{ebdN^{d+t}}{|k|}\right)^{\frac{|k|}{d}},$$

ce qui prouve le lemme. ✓

Nous pouvons commencer la preuve du théorème.

On a :  $\forall \zeta \in \mathbb{R}^N$ ,  $|\zeta_1|, \dots, |\zeta_N| \leq BN^r$ ,

$$f(x, \zeta) = \sum_{|k| \geq 0} c_k(x) \zeta^k = \sum_{|k| \leq K} c_k(x) \zeta^k + \sum_{|k| > K} c_k(x) \zeta^k = P_K(x, \zeta) + R_K(x, \zeta),$$

où  $K$  est un entier  $> 0$ . Or, d'après le lemme :

$$\begin{aligned} \|R_K(\cdot, \zeta)\| &\leq \sum_{|k| > K} \|c_k\| |\zeta_1|^{k_1} \dots |\zeta_N|^{k_N} \\ &\leq Ae^{uN^v} \sum_{|k| > K} \left(\frac{ebdB^d N^{d(r+1)+t}}{|k|}\right)^{\frac{|k|}{d}} \\ &= Ae^{uN^v} \sum_{n > K} \left(\frac{ebdB^d N^{d(r+1)+t}}{n}\right)^{\frac{n}{d}} \text{card}\{k_1 + \dots + k_N = n\} \\ &= Ae^{uN^v} \sum_{n > K} \left(\frac{ebdB^d N^{d(r+1)+t}}{n}\right)^{\frac{n}{d}} \frac{(n+N-1)!}{n! (N-1)!}, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du

**Lemme 2.** —

$$\text{card}\{k \in \mathbb{N}^N, k_1 + \dots + k_N = n\} = \frac{(n + N - 1)!}{(N - 1)! n!}.$$

*Démonstration.* — Le membre de gauche est le coefficient en  $X^n$  de la série formelle

$$\sum_{k_1, \dots, k_N \geq 0} X_1^{k_1} \dots X_N^{k_N},$$

après l'évaluation  $X_1 = \dots = X_N = X$ . Or, cette série vaut :

$$\prod_{j=1}^N \left( \sum_{k_j \geq 0} X_j^{k_j} \right) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{1 - X_j},$$

qui après évaluation donne  $\frac{1}{(1-X)^N}$ . On a d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-X)^N} &= \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dX^{N-1}} \left( \frac{1}{1-X} \right) \\ &= \frac{1}{(N-1)!} \sum_{k \geq 0} k(k-1)\dots(k-N+2) X^{k-N+1}, \end{aligned}$$

dont le coefficient en  $X^n$  correspond à  $k = n + N - 1$ , ce qui donne finalement

$$\frac{(n + N - 1) \dots (n + 1)}{(N - 1)!},$$

et prouve le lemme. ✓

Ensuite, en utilisant les majorations suivantes

$$\left( \frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \leq n! \leq \left( \frac{n}{e} \right)^n 2\pi n,$$

on a, pour tout  $n \geq N$ ,

$$\begin{aligned} \frac{(n + N - 1)!}{n! (N - 1)!} &\leq \left( \frac{n + N - 1}{n} \right)^n \left( \frac{n + N - 1}{N - 1} \right)^{N-1} \frac{n + N - 1}{\sqrt{n(N - 1)}} \\ &\leq e^{N-1} \left( \frac{2n}{N - 1} \right)^{N-1} 2 \left( \frac{n}{N - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \frac{2en}{N - 1} \right)^N. \end{aligned}$$

On en déduit, à condition de prendre  $K \geq N$ ,

$$\begin{aligned} \|R_K(\cdot, \zeta)\| &\leq Ae^{uN^v} \sum_{n \geq K+1} \left( \frac{ebdB^d N^{d(r+1)+t}}{n} \right)^{\frac{n}{d}} \left( \frac{2en}{N-1} \right)^N \\ &= Ae^{uN^v} \sum_{n \geq K+1} \left( \frac{ebdB^d N^{d(r+1)+t}}{n} \left( \frac{2en}{N-1} \right)^{\frac{dN}{n}} \right)^{\frac{n}{d}}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \left( \frac{2en}{N-1} \right)^{\frac{dN}{n}} &= \left( \left( \frac{2en}{N-1} \right)^{\frac{1}{\frac{2en}{N-1}}} \right)^{\frac{2edN}{N-1}} \\ &\leq 2^{\frac{2edN}{N-1}} \\ &\leq 2^{4ed}, \end{aligned}$$

et donc

$$\|R_K(\cdot, \zeta)\| \leq Ae^{uN^v} \sum_{n \geq K+1} \left( \frac{ebd(2^{4e}B)^d N^{d(r+1)+t}}{n} \right)^{\frac{n}{d}}.$$

Par ailleurs, pour tout

$$n \geq K \geq ebd2^{(4e+1)d}B^d N^{d(r+1)+t} (\geq N),$$

on a

$$\left( \frac{ebd(2^{4e}B)^d N^{d(r+1)+t}}{n} \right)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{2},$$

ce qui donne

$$\|R_K(\cdot, \zeta)\| \leq \frac{Ae^{uN^v}}{2^K}.$$

Remarquons maintenant que, pour  $K \geq 4\left(\frac{l}{s}\right)^2$ ,

$$\begin{aligned} K - \frac{l}{s} \log(\log K) &= K \left( 1 - \frac{l}{s} \frac{\log(\log K)}{K} \right) \\ &\geq K \left( 1 - \frac{l}{s} \frac{1}{\sqrt{K}} \right) \\ &\geq \frac{K}{2}, \end{aligned}$$

la première inégalité provenant du fait que, pour tout  $x \geq 4$ ,  $\log(\log x) \leq \sqrt{x}$ .

On choisit finalement

$$K \geq ebd2^{(4e+1)d}B^d \left( 1 + \frac{l}{s} \right)^2 \left( \log \frac{4A}{C} \right) N^{d(r+1)+v+t},$$

où  $C$  est une constante  $\leq 1$  que l'on précisera, et on montre le

**Lemme 3.** — *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$\|R_K(\cdot, \zeta)\| \leq \frac{C}{4(N \log K)^{\frac{1}{s}}}.$$

*Démonstration.* — En effet, on vérifie d'abord que

$$K \geq ebd2^{(4e+1)d} B^d N^{d(r+1)+t},$$

puisque  $(1 + \frac{l}{s})^2 \log \frac{4A}{C} uN^v \geq 1$ .

Ensuite,

$$K \geq e2^{4e+1} \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \geq 4 \left(\frac{l}{s}\right)^2.$$

Il reste à s'assurer que

$$\|R_K(\cdot, \zeta)\| \leq \frac{Ae^{uN^v}}{2^K} \leq \frac{C}{4(N \log K)^{\frac{1}{s}}},$$

soit

$$\frac{2^K}{(\log K)^{\frac{1}{s}}} \geq \frac{4Ae^{uN^v} N^{\frac{1}{s}}}{C},$$

ou encore, puisque  $K - \frac{l}{s} \log \log K \geq \frac{K}{2}$ ,

$$K \geq 2 \log \frac{4A}{C} + 2 \frac{l}{s} \log N + 2uN^v \log e.$$

Or,

$$\begin{aligned} K &\geq 2 \log \frac{4A}{C} \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 N 2euN^v \\ &\geq 2 \log \frac{4A}{C} + \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 N + 2euN^v, \end{aligned}$$

car  $2 \log \frac{4A}{C}$ ,  $(1 + \frac{l}{s})^2 N$  et  $2euN^v$  sont  $\geq 2$ . D'autre part,  $(1 + \frac{l}{s})^2 \geq 2 \frac{l}{s}$ ,  $N \geq \log N$ , ce qui donne

$$K \geq 2 \log \frac{4A}{C} + 2 \frac{l}{s} \log N + 2uN^v \log e,$$

et prouve le lemme. ✓

On a finalement :

$$f(\cdot, \zeta) = P_K(\cdot, \zeta) + R_K(\cdot, \zeta),$$

où  $P_K$  est un polynôme en  $\zeta$ , à coefficients dans l'espace  $C(I^s)$  (resp.  $L^1(I^s)$ ), à  $N$  variables et de degré  $K$ , et  $\|R_K(\cdot, \zeta)\| \leq \frac{C}{4(N \log K)^{\frac{1}{s}}}$ , où la norme désigne la norme uniforme (resp.  $L^1$ ).

D'après le théorème de Vitushkin (dont on redonnera une preuve dans la partie 4), il existe  $h \in \Lambda_{l,s}$ , tel que,  $\forall \zeta \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\|h - P_K(\cdot, \zeta)\| \geq \frac{C}{(N \log K)^{\frac{1}{s}}},$$

où  $C = C(l, s)$  est une constante variant selon le cas continu ou  $L^1$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned} \|h - f(\cdot, \zeta)\| &\geq \|h - P_K(\cdot, \zeta)\| - \|R_K(\cdot, \zeta)\| \\ &\geq \frac{3C}{4(N \log K)^{\frac{1}{s}}}. \end{aligned}$$

Pour terminer la preuve du théorème, il reste à obtenir  $\frac{C'}{(N \log N)^{\frac{1}{s}}}$ . Pour cela, on choisit le plus petit entier  $K$  possible, soit

$$\begin{aligned} K &\leq 1 + ebud2^{(4e+1)d}B^d \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \log \frac{4A}{C} N^{d(r+1)+v+t} \\ &\leq 2ebud2^{(4e+1)d}B^d \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \log \frac{4A}{C} N^{d(r+1)+v+t}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \log K &\leq (d(r+1) + v + t) \log N + \log \left( 2ebud2^{(4e+1)d}B^d \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \log \frac{4A}{C} \right) \\ &\leq (d(r+1) + v + t) \log N + \log \left( 2ebud2^{(4e+1)d}B^d \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \log \frac{4A}{C} \right), \end{aligned}$$

car les deux termes de la somme sont  $\geq 2$ , ce qui donne finalement

$$\|h - f(\cdot, \zeta)\| \geq \frac{C'}{(N \log N)^{\frac{1}{s}}},$$

avec

$$C' = \frac{3C}{4 \left[ (d(r+1) + v + t) \log \left( 2ebud2^{(4e+1)d}B^d \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \log \frac{4A}{C} \right) \right]^{\frac{1}{s}}},$$

et achève la preuve du théorème. ✓

**Remarque 1.** — La fonction  $h$  qui intervient pour obtenir la minoration dans le cas analytique, est la même que dans le cas polynomial. On s'en servira dans la preuve des corollaires suivants.

D'autre part, comme on le constatera dans la partie suivante, la constante  $C$  ne dépend que de  $l$  et  $s$ , ainsi  $C'$  va dépendre de  $l, s, A, u, v, b, t, d, B, r$  (mais pas de  $N$ ). On verra en particulier des exemples d'estimation de  $C$ , et donc de calcul explicite de  $C'$  (cf corollaire 5).

**3.2. Quelques résultats dérivés.** — On peut généraliser le théorème 1 de la façon suivante :

**Théorème 2.** — Soit de même  $f(x, \zeta, w)$  une fonction qui vérifie les mêmes conditions que dans le théorème 1, et qui est en plus holomorphe par rapport aux variables  $w_1, \dots, w_m$  sur le domaine

$$\{\Re z > 0\}^m,$$

et de type exponentiel :  $\forall (\zeta, w) \in \mathbb{C}^N \times \{\Re z > 0\}^m$ ,

$$\|f(\cdot, \zeta, w)\| \leq Ae^{uN^v} e^{bN^t(\|\zeta\|_1^d + \|w\|_1^d)}.$$

Alors l'approximation de  $\Lambda_{l,s}$  par la famille  $\{f(\cdot, \zeta, w)\}$ , où les  $\zeta_j, w_i$  sont réels,  $\zeta_j = O(N^r)$  et

$$|w_i - a_i(N)| \leq \frac{1}{2}a_i(N), \quad i = 1, \dots, m,$$

avec  $a_i(N) \geq 1$  polynomial en  $N$ , est au mieux de l'ordre de

$$\frac{1}{(N \log N)^{\frac{1}{s}}}.$$

*Démonstration.* — La preuve est semblable à celle du théorème 1 : on écrit de même le développement de Taylor de  $f$  au point  $(0, \dots, 0, a_1(N), \dots, a_m(N))$ , soit

$$f(\cdot, \zeta, w) = \left( \sum_{|k| \leq K, |l| \geq 0} + \sum_{|k| > K, |l| \geq 0} \right) (c_{k,l}(a) \zeta^k (w - a)^l),$$

où les coefficients  $c_{k,l}$  sont majorés à l'aide de la formule de Cauchy :  $\forall R, \forall r_i < a$ ,

$$\begin{aligned} |c_{k,l}| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{N+m}} \int_{|\zeta'_j|=R, |w'_i-a_i|=r_i} \frac{|f(\cdot, \zeta', w')|}{|\zeta'^{k+1}| |(w' - a)^{l+1}|} d\zeta' dw' \\ &\leq Ae^{uN^v} \frac{e^{bN^{d+t}R^d}}{R^{|k|}} \frac{e^{bN^t\|a+r\|_1^d}}{|r^l|}. \end{aligned}$$

Puisque  $|w_i - a_i| \leq \frac{a_i}{2}$ , la deuxième somme ainsi peut être majorée :

$$\begin{aligned} \sum_{|k| > K, |l| \geq 0} |c_{k,l}| |\zeta^k| |(w - a)^l| &\leq Ae^{uN^v} \sum_{|k| > K} \frac{e^{bN^{d+t}R^d}}{R^{|k|}} (BN^r)^{|k|} \sum_{|l| \geq 0} \frac{e^{bN^t2^d\|a\|_1^d}}{2^{|l|}} \\ &\leq A2^m e^{uN^v + bN^t2^d\|a\|_1^d} \sum_{n > K} \left( \frac{ebdB^d N^{d(r+1)+t}}{n} \right)^{\frac{n}{d}} \frac{(n + N - 1)!}{n! (N - 1)!}, \end{aligned}$$

ce qui, pour  $K$  de l'ordre de  $N^\alpha$  (cf preuve du théorème 1), est majoré par

$$\frac{C}{8(N \log K)^{\frac{1}{s}}}.$$

Pour l'autre somme, on réécrit de même

$$\sum_{|k| \leq K, |l| \geq 0} = \sum_{|k| \leq K} \sum_{|l| \leq p(k)} + \sum_{|k| \leq K} \sum_{|l| > p(k)},$$

où pour chaque  $n = |k|$ , on choisit  $p(k) = p(n) = p(K)$ , ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{|l| > p(K)} \frac{1}{2^{|l|}} &= \sum_{p > p(K)} \frac{1}{2^p} \frac{(p+m-1)!}{p!(m-1)!}, \\ &\leq \sum_{p > p(K)} \frac{(p+1)^{m-1}}{2^p} \\ &\leq \left(\frac{3}{4}\right)^{p(K)}, \end{aligned}$$

pour  $p(K) \geq p(K, m)$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{|k| \leq K} \sum_{|l| > p(k)} |c_{k,l}| |\zeta^k| |(w-a)^l| &\leq Ae^{uN^v + bN^t 2^d \|a\|_1^d} \sum_{n=0}^K \left( \frac{ebdB^d N^{d(r+1)+t}}{n} \right)^{\frac{n}{d}} \frac{(n+N-1)!}{n!(N-1)!} \sum_{|l| > p(K)} \frac{1}{2^{|l|}} \\ &\leq Ae^{uN^v + bN^t 2^d \|a\|_1^d} \sum_{n=0}^K \left( \frac{(ebd)^{\frac{1}{d}} BN^{r+1+\frac{t}{d}}}{n^{\frac{1}{d}}} \right)^n N^n \left(\frac{3}{4}\right)^{p(K)} \\ &\leq Ae^{uN^v + bN^t 2^d \|a\|_1^d} (K+1) \left( (ebd)^{\frac{1}{d}} BN^{r+t+2} \right)^K \left(\frac{3}{4}\right)^{p(K)} \\ &\leq \frac{1}{2^K}, \end{aligned}$$

si  $p(K) \geq \alpha K$ , ce qui donnera encore une majoration par

$$\frac{C}{8(N \log K)^{\frac{1}{s}}}.$$

Pour finir, le somme restante est

$$\sum_{|k| \leq K} \sum_{|l| \leq p(K)} c_{k,l} \zeta^k (w-a)^l,$$

qui est un polynôme en  $(\zeta, w)$  (donc à  $N+m$  variables), de degré total (au plus)  $K + p(K) \leq \gamma K$ , ce qui donne, par le théorème 3 de Vitushkin :  $\exists h \in \Lambda_{l,s}$ ,  $\forall \zeta, w$ ,

$$\begin{aligned} \|f(\cdot, \zeta, w) - h\| &\geq \frac{3C'}{4((N+m) \log \gamma K)^{\frac{1}{s}}} \\ &\geq \frac{C''}{(N \log N)^{\frac{1}{s}}}, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion. ✓

On en déduit respectivement les corollaires suivants des théorèmes 2 et 1, qui nous serviront dans la partie 5.

**Corollaire 1.** — Soit  $\psi(x, \zeta, w)$  une fonction définie sur  $[0, 1] \times \mathbb{C}^N \times \{\Re z > 0\}^m$ , de classe  $C^2$  par rapport à  $x$ , et telle que, pour tout  $x \in [0, 1]$ , les fonctions  $\psi(x, \zeta, w)$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \zeta, w)$  et  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, \zeta, w)$  vérifient les conditions du théorème 2 pour le cas continu.



Soit d'autre part  $k(x, \zeta, w)$  continue par rapport à  $x$ , analytique de type exponentiel par rapport à  $(\zeta, w)$ , dont la restriction sur  $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^m$  est dominée polynomialement.

On suppose également que,  $\forall (\zeta, w) \in \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^m$ ,  $\zeta_j = O(N^r)$ ,  $|\zeta_i - a_i(N)| \leq \frac{a_i(N)}{2}$ ,

$$\frac{1}{\psi(0, \zeta, w)} = O\left(e^{\alpha N^\beta}\right),$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, \zeta, w) = 0.$$

Soit finalement une constante  $b(N) > 0$ , telle que  $b(N)$  et  $\frac{1}{b(N)}$  soient polynomiales en  $N$ .

Alors l'approximation de  $\Lambda_l([0, 1])$  par la famille

$$\left\{ \left( x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{b(N)} \left( k(x, \zeta, w) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\psi} \right) (x, \zeta, w) \right) \right), \zeta_j = O(N^r), |w_i - a_i(N)| \leq \frac{a_i(N)}{2} \right\},$$

au sens uniforme sur  $[0, 1]$ , lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , ne peut pas être meilleure que

$$\frac{\tilde{C}}{N^l (\ln N)^l}.$$

( $\tilde{C}$  dépend des paramètres qui apparaissent dans la constante  $C'$  du théorème 2, ainsi que de  $\alpha, \beta$ )

En outre, une fonction  $h$  qui réalise la minoration peut être prise dans  $\Lambda_l \cap C^{[l]}$ , et être identiquement nulle sur  $[0, \frac{1}{20}]$ .

*Démonstration.* — On peut supposer que,  $\forall \zeta, w$ ,  $\psi(0, \zeta, w) > 0$  : en effet, la condition sur  $\psi(0, \zeta, w)$  montre qu'elle ne s'annule pas sur l'ensemble (connexe)  $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^m$ , donc reste de signe constant, et peut être remplacée par  $-\psi$  (ce qui ne change pas la famille).

On se donne  $\psi, k$  et on pose

$$\tilde{\psi}(x, \zeta, w) = e^{\tilde{k}(x, \zeta, w)} \psi(x, \zeta, w),$$

où  $\tilde{k}(x, \zeta, w) = \int_0^x dt \int_0^t k(s, \zeta, w) ds$ . Alors le théorème 2 est encore vrai (même si  $\tilde{\psi}$  peut ne plus être de type exponentiel) : en effet, on écrit

$$\psi(x, \zeta, w) = P_K(x, \zeta, w) + R_K(x, \zeta, w),$$

et puisque  $e^{\tilde{k}(x, \zeta, w)} = O\left(e^{\alpha N^\beta}\right)$ , quitte à agrandir  $K$  (tout en le gardant polynomial en  $N$ ), on a encore

$$\left\| e^{\tilde{k}(\cdot, \zeta, w)} R_K(\cdot, \zeta, w) \right\|_\infty \leq \frac{C_\infty(l, 1)}{4((N + m) \log K)^l}.$$

D'autre part, il existe  $h \in \Lambda_l([0, 1])$  pour  $P_K$ , tel que  $\forall (\zeta, w), \exists x(\zeta, w)$ ,

$$\frac{C'_\infty(l, 1)}{((N + m) \log K)^l} \leq |h(x)| \text{ et } h(x) P_K(x, \zeta, w) \leq 0,$$

ce qui donne encore

$$\left\| h - e^{\tilde{k}(\cdot, \zeta, w)} P_K(\cdot, \zeta, w) \right\|_{\infty} \geq \frac{C'_{\infty}(l, 1)}{((N + m) \log K)^l}.$$

On peut maintenant prouver le corollaire. Posons

$$\tilde{\chi}(x, \zeta_1, \dots, \zeta_N, \zeta_{N+1}, w) = e^{\zeta_{N+1}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial^2 x} \tilde{\psi} - \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right)^2 \right) (x, \zeta, w).$$

On voit alors que

$$\tilde{\chi}(\cdot, \zeta, w) = e^{2\tilde{k}(\cdot, \zeta, w)} \chi(\cdot, \zeta, w),$$

où  $\chi$  vérifie encore les conditions de l'énoncé (contrairement à  $\tilde{\chi}$  qui n'est plus nécessairement de type exponentiel). En particulier, celles du théorème 2 sont satisfaites, et ce qui précède prouve qu'on a l'existence de  $h \in \Lambda_l([0, 1])$  qui vérifie, pour tous  $\zeta_j = O(N^r)$ ,  $j = 1, \dots, N + 1$ ,  $|w_i - a_i(N)| \leq \frac{a_i(N)}{2}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$\|h - \tilde{\chi}(\cdot, \zeta, \zeta_{N+1}, w)\|_{\infty} \geq \frac{C'_{\infty}}{((N + m + 1) \log(N + m + 1))^l},$$

et même plus précisément, si  $\chi = P_K + R_K$  ( $K = O(N^\gamma)$ ), pour  $x = x(\zeta, \zeta_{N+1}, w)$  :

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{C'_{\infty}(l, 1)}{((N + m + 1) \log K)^l} \leq |h(x)| \leq \|h\|_{\infty} \leq \frac{2^l C'_{\infty}(l, 1)}{((N + m + 1) \log K)^l}, \\ h(x) e^{2\tilde{k}(x, \zeta, w)} P_K(x, \zeta, \zeta_{N+1}, w) \leq 0, \\ \left\| e^{2\tilde{k}(\cdot, \zeta, w)} R_K(\cdot, \zeta, \zeta_{N+1}, w) \right\|_{\infty} \leq \frac{C'_{\infty}(l, 1)}{4((N + m + 1) \log K)^l}. \end{cases}$$

En outre,  $h \in C^{[l]}([0, 1])$  et est identiquement nulle sur  $[0, \frac{1}{20}]$  (la troisième ligne de  $(*)$  provient de la preuve du théorème 2 ; les autres hypothèses résultent de la construction de  $h$ , elles seront justifiées dans la partie 4 comme le précisera le corollaire 6 qui suit la preuve du théorème 3 de Vitushkin).

D'autre part, soit  $\mu \in [0, 1]$  un réel. On a

$$h(x) \mu e^{2\tilde{k}(x, \zeta, w)} P_K(x, \zeta, \zeta_{N+1}, w) \leq 0,$$

et

$$\left\| \mu e^{\tilde{k}(\cdot, \zeta, w)} R_K(\cdot, \zeta, \zeta_{N+1}, w) \right\|_{\infty} \leq \frac{C'_{\infty}(l, 1)}{4((N + m + 1) \log K)^l},$$

ce qui donne

$$|h(x) - \mu \tilde{\chi}(x, \zeta, \zeta_{N+1}, w)| \geq \frac{3C'_{\infty}(l, 1)}{4((N + m + 1) \log K)^l}.$$

Par ailleurs,  $\psi$  étant de type exponentiel, on a en particulier, pour tous  $\zeta_j$ ,  $w_i = O(N^r)$ ,

$$0 < \tilde{\psi}(0, \zeta, w) \leq A e^{uN^v + bN^t((N+1)BN^r)^d + (2ma_i(N))^d} = O\left(e^{\alpha' N^{\beta'}}\right),$$

et il en est de même pour  $\frac{1}{\tilde{\psi}(0, \zeta, w)}$  et  $e^{b(N)}$  par hypothèse, ce qui montre que

$$\ln \left( \frac{e^{b(N)}}{b(N) \tilde{\psi}(0, \zeta, w)^2} \right) = O(N^{r'}),$$

que l'on peut alors choisir comme valeur du paramètre  $\zeta_{N+1}$ , ce qui donnera (quitte à agrandir  $K = O(N^\gamma)$ ), pour tout  $\mu \in [0, 1]$  :

$$\left| h(x) - \frac{\mu e^{b(N)} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial^2 x}(x, \zeta, w) \tilde{\psi}(x, \zeta, w) - \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right)^2(x, \zeta, w)}{b(N) \left( \tilde{\psi}(0, \zeta, w) \right)^2} \right| \geq \frac{3C'_\infty(l, 1)}{4((N + m + 1) \log K)^l}.$$

Supposons alors  $e^{-b(N)} \left( \frac{\tilde{\psi}(0, \zeta, w)}{\tilde{\psi}(x, \zeta, w)} \right)^2 \leq 1$ . On peut donc, dans l'inégalité, remplacer  $\mu$  par  $e^{-b(N)} \left( \frac{\tilde{\psi}(0, \zeta, w)}{\tilde{\psi}(x, \zeta, w)} \right)^2$ , pour obtenir :

$$\begin{aligned} \left| h(x) - \frac{1}{b(N)} \frac{\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial^2 x}(x, \zeta, w) \tilde{\psi}(x, \zeta, w) - \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right)^2(x, \zeta, w)}{\left( \tilde{\psi}(x, \zeta, w) \right)^2} \right| &\geq \frac{3C'_\infty(l, 1)}{4((N + m + 1) \log K)^l} \\ &\geq \frac{C'}{(N \log N)^l}. \end{aligned}$$

Dans l'autre cas, on a  $\left| \frac{\tilde{\psi}(x, \zeta, w)}{\tilde{\psi}(0, \zeta, w)} \right| < e^{-\frac{b(N)}{2}}$ . Quitte à rapprocher  $x$  de 0, on peut supposer que la fonction  $t \mapsto \tilde{\psi}(t, \zeta, w)$  ne s'annule pas sur  $[0, x]$ . En effet, car sinon, soit  $x_0$  le premier zéro ( $> 0$ ) de  $\tilde{\psi}(\cdot, \zeta, w)$ . Comme  $\lim_{t \rightarrow x_0} \tilde{\psi}(t, \zeta, w) = 0$ , il suffit de choisir  $x$  suffisamment proche de  $x_0$ , pour que

$$0 < \left| \frac{\tilde{\psi}(x, \zeta, w)}{\tilde{\psi}(0, \zeta, w)} \right| < e^{-\frac{b(N)}{2}}.$$

En particulier,  $\tilde{\psi}(x, \zeta, w)$  et  $\tilde{\psi}(0, \zeta, w)$  sont de même signe, la fonction

$$t \in [0, x] \mapsto \ln \frac{\tilde{\psi}(t, \zeta, w)}{\tilde{\psi}(0, \zeta, w)},$$

est donc bien définie et régulière. Puisque

$$\ln \frac{\tilde{\psi}(x, \zeta, w)}{\tilde{\psi}(0, \zeta, w)} < -\frac{b(N)}{2},$$

alors il existe  $x_1 \in [0, x]$ , tel que

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}(0, \zeta, w)}(x_1, \zeta, w) \right| = \left| \frac{\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(x_1, \zeta, w)}{\tilde{\psi}(x_1, \zeta, w)} \right| > \frac{b(N)}{2}.$$

En effet, car sinon on aurait

$$\left| \ln \frac{\tilde{\psi}(x, \zeta, w)}{\tilde{\psi}(0, \zeta, w)} \right| = \left| \int_0^x \frac{\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(t, \zeta, w)}{\tilde{\psi}(t, \zeta, w)} dt \right| \leq \frac{b(N)}{2},$$

ce qui est impossible.

De même, puisque par hypothèse,  $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(0, \zeta, w) = 0$ , il existe  $x_2 \in [0, x_1]$ , tel que

$$\left| \frac{\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial^2 t}(x_2, \zeta, w) \tilde{\psi}(x_2, \zeta, w) - \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right)^2(x_2, \zeta, w)}{\left( \tilde{\psi}(x_2, \zeta, w) \right)^2} \right| > \frac{b(N)}{2}.$$

On en déduit

$$\left| h(x_2) - \frac{1}{b(N)} \frac{\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial^2 t}(x_2, \zeta, w) \tilde{\psi}(x_2, \zeta, w) - \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right)^2(x_2, \zeta, w)}{\left( \tilde{\psi}(x_2, \zeta, w) \right)^2} \right| \geq \frac{1}{2} - \|h\|_\infty.$$

Or, d'après (\*), quitte à réduire  $C'_\infty(l, 1)$ , on a également  $\|h\|_\infty \leq \frac{1}{4}$ , ce qui donne

$$\left| h(x_2) - \frac{1}{b(N)} \frac{\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial^2 t}(x_2, \zeta, w) \tilde{\psi}(x_2, \zeta, w) - \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right)^2(x_2, \zeta, w)}{\left( \tilde{\psi}(x_2, \zeta, w) \right)^2} \right| \geq \frac{1}{4} \geq \frac{\tilde{C}}{(N \log N)^l},$$

quitte à réduire  $\tilde{C}$ , ce qui achève le second cas.

Puisqu'on a également

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{\tilde{\psi}(x, \zeta, w)}{\tilde{\psi}(0, \zeta, w)} = k(x, \zeta, w) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{\psi(x, \zeta, w)}{\psi(0, \zeta, w)},$$

on peut enfin conclure l'existence de  $h \in \Lambda_l([0, 1])$ , tel que, pour tous  $\zeta_j = O(N^r)$ ,  $j = 1, \dots, N$  et  $|w_i - a_i(N)| \leq \frac{a_i(N)}{2}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$\left\| h - \frac{1}{b(N)} \left( k(\cdot, \zeta, w) + \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x}(\cdot, \zeta, w) \psi(\cdot, \zeta, w) - \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2(\cdot, \zeta, w)}{(\psi(\cdot, \zeta, w))^2} \right) \right\|_\infty \geq \frac{\tilde{C}}{(N \ln N)^l}.$$

✓

On prouve également le

**Corollaire 2.** — On considère cette fois  $\psi(x, \zeta)$  sur  $[0, 1] \times \mathbb{C}^N$ , de classe  $C^1$  par rapport à  $x$ , et tel que  $\psi(x, \zeta)$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \zeta)$  vérifient les conditions du théorème 1, ainsi que

$$\frac{1}{\psi(0, \zeta)} = O\left(e^{\alpha N^\beta}\right).$$

Alors l'approximation du compact

$$\int_0^\cdot \Lambda_l([0, 1]) = \left\{ \left( x \mapsto \int_0^x h(t) dt \right), h \in \Lambda_l \right\}$$

par la famille

$$\left\{ \left( x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{b(N)} \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x, \zeta) \right), \zeta_j = O(N^r), \forall j = 1, \dots, N \right\},$$

sur  $[0, 1]$ , avec  $b(N) > 0$  et  $\frac{1}{b(N)}$  polynomiaux en  $N$ , ne peut pas être meilleure que

$$\frac{\tilde{C}}{N^{l+1}(\ln N)^{l+1}}.$$

Ici aussi,  $h$  a les mêmes propriétés que dans le corollaire précédent.

*Démonstration.* — On raisonne de même en posant cette fois

$$\chi(x, \zeta_1, \dots, \zeta_N, \zeta_{N+1}) = e^{\zeta_{N+1}} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \zeta_1, \dots, \zeta_N).$$

On a l'existence de  $h_1 \in \Lambda_{l+1}([0, 1])$ , tel que

$$\|h_1 - \chi(\cdot, \zeta_1, \dots, \zeta_{N+1})\|_\infty \geq \frac{C'_\infty(l+1, 1)}{((N+1) \log(N+1))^{l+1}},$$

et même plus précisément,  $\chi = P_K + R_K$ , avec :

$$(**) \begin{cases} \frac{C'_\infty(l+1, 1)}{((N+1) \log K)^{l+1}} \leq |h_1(x)| \leq \|h_1\|_\infty \leq \frac{2^{l+1} C'_\infty(l+1, 1)}{((N+1) \log K)^{l+1}}, \\ h_1(x) P_K(x, \zeta, \zeta_{N+1}) \leq 0, \\ \|R_K(\cdot, \zeta, \zeta_{N+1})\|_\infty \leq \frac{C'_\infty(l+1, 1)}{4((N+1) \log K)^{l+1}}. \end{cases}$$

Si  $\mu \in [0, 1]$ , on a alors

$$\begin{aligned} |h_1(x) - \mu \tilde{\chi}(x, \zeta, \zeta_{N+1})| &\geq |h_1(x) - \mu P_K(x, \zeta)| - \mu \|R_K(\cdot, \zeta, \zeta_{N+1})\|_\infty \\ &\geq \frac{3C'_\infty(l+1, 1)}{4((N+1) \log K)^{l+1}} \\ &\geq \frac{C'}{(N \log N)^{l+1}}. \end{aligned}$$

Prenons alors  $\zeta_{N+1} = \ln \frac{e^{b(N)}}{b(N)\psi(0, \zeta)}$  (sachant qu'on peut ici aussi supposer  $\psi(0, \zeta) > 0$ ). De deux choses l'une : soit  $e^{b(N)} \frac{\psi(x, \zeta)}{\psi(0, \zeta)} \geq 1$ , donc en posant  $\mu = \frac{\psi(0, \zeta)}{e^{b(N)} \psi(x, \zeta)}$ , on a

$$\left| h_1(x) - \frac{1}{b(N)} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \zeta) \right| \geq \frac{C'}{(N \log N)^{l+1}};$$

soit  $\psi(x, \zeta) < \frac{\psi(0, \zeta)}{e^{b(N)}}$ , donc, quitte à rapprocher  $x$  de 0, on peut aussi supposer  $\psi(x, \zeta) > 0$ , et  $\exists x' = x'(\zeta) \in [0, 1]$ , tel que

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x}(x', \zeta) \right| > b(N)$$

soit, puisque  $\|h_1\|_\infty \leq \frac{1}{2}$  (quitte à le réduire),

$$\left| h_1(x') - \frac{\partial \psi}{\partial x}(x', \zeta) \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Il ne reste plus qu'à prendre  $h = h'_1 \in \Lambda_l([0, 1])$ , on a  $h_1(x) = \int_0^x h(t)dt$  (puisque  $h_1(0) = 0$ ), et  $h$  s'annule aussi identiquement sur  $[0, \frac{1}{20}]$ .

✓

Dans la partie 5, on aura plutôt recours au

**Corollaire 3.** — *Les corollaires 1 et 2 sont encore valables (pour  $l > 1$ ) si on se limite aux fonctions  $h > 0$ ,  $h \in \Lambda_l \cap C^{[l]}([0, 1])$ , strictement décroissantes et qui vérifient*

$$h^{(j)}(0) = 0, \forall j = 1, \dots, [l].$$

*Démonstration.* — On se donne  $\psi$  et on pose

$$\tilde{\psi}(x, \zeta, w) = \exp\left(b(N) \left(ax^{[l]+3} - bx^2\right)\right) \psi(x, \zeta, w),$$

$a, b$  réels  $> 0$ . Alors  $\tilde{\psi}$  vérifie encore les hypothèses du corollaire 1 ( $b(N)$  étant polynomial en  $N$ ) : elle est encore de classe  $C^2$  sur  $[0, 1]$ ,  $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}(0, \zeta, w) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, \zeta, w) = 0$ ,  $\forall \zeta, w$ , et

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \ln \frac{\tilde{\psi}(x, \zeta, w)}{\tilde{\psi}(0, \zeta, w)} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \ln \frac{\psi(x, \zeta, w)}{\psi(0, \zeta, w)} \right) + b(N)(a([l] + 3)([l] + 2)x^{[l]+1} - 2b).$$

D'après le corollaire 1, il existe  $h \in \Lambda_l \cap C^{[l]}([0, 1])$  qui vérifie,  $\forall \zeta$ ,

$$\begin{aligned} \left\| h - \frac{1}{b(N)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}(0, \zeta, w)} \right) (\cdot, \zeta, w) \right\|_{\infty} &= \left\| \tilde{h} - \frac{1}{b(N)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{\psi}{\psi(0, \zeta, w)} \right) (\cdot, \zeta, w) \right\|_{\infty} \\ &\geq \frac{\tilde{C}}{(N \log N)^l}, \end{aligned}$$

où  $\tilde{h}(x) = h(x) + 2b - a([l] + 3)([l] + 2)x^{[l]+1}$ .

De même, dans le cas du corollaire 2, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x h(t)dt - \frac{1}{b(N)\tilde{\psi}(x, \zeta)} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}(x, \zeta) \right| &= \left| \int_0^x \tilde{h}(t)dt - \frac{1}{b(N)\psi(x, \zeta)} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \zeta) \right| \\ &\geq \frac{C'}{(N \log N)^{l+1}}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à choisir convenablement  $a$  et  $b$  : on a d'abord, sur  $[\frac{1}{20}, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{h}'(x) &= h'(x) - a([l] + 3)([l] + 2)([l] + 1)x^{[l]} \\ &\leq -a([l] + 3)([l] + 2)([l] + 1)\frac{1}{20^{[l]}} + \|h'\|_{\infty} \\ &< 0, \end{aligned}$$

pour  $a$  assez grand ( $h$  étant dans  $\Lambda_l([0, 1])$ ), ce qui montre que  $\tilde{h}$  est strictement décroissante ; ainsi que sur  $[0, \frac{1}{20}]$  où  $h$  est constante.  $a$  étant fixé, il ne reste plus qu'à choisir  $b$  assez grand pour avoir  $\tilde{h} > 0$ , ce qui montre que  $\tilde{h}$  est strictement décroissante et a ses dérivées qui s'annulent en 0 jusqu'à l'ordre  $[l]$ .

Le corollaire est donc prouvé, à condition de prendre  $\tilde{h}$  dans un homothétique de  $\Lambda_l([0, 1])$ . Pour le cas général, il suffit de prendre  $\frac{\tilde{h}}{a([l]+3)([l]+2)+2b+1}$ , quitte à changer  $b(N)$  et diminuer  $\tilde{C}$ .

✓

#### 4. Théorème de Vitushkin par la méthode de Warren

**4.1. Enoncé et quelques rappels.** — On se propose dans cette partie de retrouver le résultat suivant :

**Théorème 3.** — Soit  $\Lambda_{l,s} \subset C(I^s)$  (resp.  $L^1(I^s)$ ),  $l > 0$ , et soit

$$P_{n,d} = \left\{ \sum_{|k| \leq d} c_k(x) \zeta^k, \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

où  $n \geq 1, d \geq 2$  sont des entiers, et  $c_k \in C(I^s)$  (resp.  $L^1(I^s)$ ).

On a alors :  $\exists h \in \Lambda_{l,s}, \forall \zeta \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|h - P(\zeta)\| \geq \frac{C(l,s)}{(n \log d)^{\frac{1}{s}}},$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme uniforme  $\|\cdot\|_\infty$  (resp.  $\|\cdot\|_{L^1}$ ),  $C(l,s) = C_\infty(l,s)$  (resp.  $C_{L^1}(l,s)$ ).

De façon équivalente, si  $\mathcal{P}_{n,d}$  désigne l'ensemble des parties de  $C(I^s)$  (resp.  $L^1(I^s)$ ) paramétrées avec  $n$  variables, polynomialement de degré (au plus)  $d$ , on a

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) := \inf_{P \in \mathcal{P}_{n,d}} \sup_{h \in \Lambda_{l,s}} \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|h - P(\zeta)\| \geq \frac{C(l,s)}{(n \log d)^{\frac{1}{s}}}.$$

On a en outre le calcul des constantes :

$$C_\infty(l,s) = \frac{1}{\sqrt{s} 2^{l+1} 8^{\frac{l}{s}} ([l]+1)^{[l]+1} (4(1+e))^{s([l]+1)}},$$

et

$$C_{L^1}(l,s) = \frac{(([l]+1)!)^{2s}}{5\sqrt{s} 2^{l+2} 18^{\frac{l}{s}} ([l]+1)^{[l]+1} ((2[l]+3)!)^s (1+e)^{s([l]+1)}}.$$

La preuve de ce théorème utilise la même méthode que Warren dans [20]. Elle se fonde seulement sur l'estimation du nombre de composantes connexes d'un ensemble algébrique de  $\mathbb{R}^n$ . Plus précisément, on a :

**Proposition 1.** — Soient  $p_1, \dots, p_q$  des polynômes réels à  $n$  variables de degré au plus  $d$ . Alors le nombre de composantes connexes de l'ensemble

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^q \{\zeta \in \mathbb{R}^n, p_j(\zeta) = 0\}$$

est fini, et est majoré par  $\left(\frac{4edq}{n}\right)^n$ .

L'idée est d'estimer le nombre de suites de  $\pm 1$  atteintes par la fonction

$$\zeta \in \mathbb{R}^n \mapsto (\operatorname{sgn} p_1(\zeta), \dots, \operatorname{sgn} p_q(\zeta))$$

(en convenant que  $\operatorname{sgn} 0 = 0$ ), en utilisant le principe que la restriction de chaque  $p_j$  sur chaque composante connexe de  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^q \{\zeta \in \mathbb{R}^n, p_j(\zeta) = 0\}$  donne une fonction continue qui ne s'annule pas, donc de signe constant (et c'est un argument qu'on ne peut pas transposer dans le cas complexe). La démonstration du théorème 3 repose alors sur le :

**Corollaire 4.** — *Si  $q \geq 8n \log d$ , alors il existe une suite  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ , où  $\varepsilon_j = \pm 1$ , qui n'est jamais atteinte par  $\operatorname{sgn} P(\zeta) = (\operatorname{sgn} p_1(\zeta), \dots, \operatorname{sgn} p_q(\zeta))$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ .*

*De même, si  $q \geq 18n \log d$ , il existe une suite  $\varepsilon$  qui diffère de plus de  $\frac{q}{10}$  places de toute suite  $\operatorname{sgn} P(\zeta)$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ .*

Ces deux énoncés sont prouvées par H. E. Warren dans [20]. Ils utilisent les résultats de Oleinik et Petrovskii sur l'estimation du nombre de composantes connexes d'un ensemble algébrique, qui proviennent finalement du théorème de Bézout (cf. [14]).

**4.2. Construction d'une famille de  $\Lambda_{l,s}$ .** — Avant de donner la preuve du théorème, on doit montrer la proposition suivante (qui est une reformulation du calcul de la capacité de  $\Lambda_{l,s}$ ).

**Proposition 2.** — *Soient  $r$  un entier  $\geq 1$ ,  $q = r^s$ , et  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$  une suite de  $\pm 1$ . On définit sur  $I^s$  la fonction  $f_\varepsilon$  de la façon suivante : on considère le pavage (moyennant les bords) de  $I^s$  en les  $q = r^s$  cubes  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ . Si  $x \in K_i = \prod_{j=1}^s [t_{i,j}, t_{i,j} + \frac{1}{r}]$ , alors  $x = t_i + y$ , où  $t_i = (t_{i,1}, \dots, t_{i,s})$ ,  $y \in [0, \frac{1}{r}]^s$ , et on pose*

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon_i \frac{g_{l,s}(ry)}{2r^l M_{l,s}},$$

où  $g_{l,s}$  est définie sur  $I^s$  par

$$g_{l,s}(x) = \prod_{j=1}^s (x_j(1-x_j))^{[l]+1},$$

$[l]$  étant la partie entière de  $l$ , et

$$M_{l,s} = \sqrt{s}(1+e)^{s([l]+1)}([l]+1)^{[l]+1}.$$

Alors  $f_\varepsilon$  est bien définie et est un élément de  $\Lambda_{l,s}$ .

On commence par prouver le

**Lemme 4.** — *Soit la fonction définie sur  $[0, 1]$  par*

$$t \mapsto t^{[l]+1}(1-t)^{[l]+1}.$$

Alors  $\forall k, 0 \leq k \leq [l] + 1$ ,

$$\left\| \frac{d^k}{dt^k} \left( t^{[l]+1}(1-t)^{[l]+1} \right) \right\|_\infty \leq (1+e)^{[l]+1}([l]+1)^k.$$



*Démonstration.* —  $\forall k, 0 \leq k \leq [l] + 1, \forall t \in [0, 1]$ ,

$$t^{[l]+1}(1-t)^{[l]+1} = \sum_{j=0}^{[l]+1} C_{[l]+1}^j (-1)^j t^{[l]+j+1},$$

donc

$$\left| \frac{d^k}{dt^k} \left( t^{[l]+1}(1-t)^{[l]+1} \right) \right| \leq \sum_{j=0}^{[l]+1} C_{[l]+1}^j ([l] + j + 1) \dots ([l] + j - k + 2) t^{[l]+j+1-k}.$$

Or,

$$\begin{aligned} ([l] + j + 1) \dots ([l] + j - k + 2) &\leq ([l] + 1)^k \left( 1 + \frac{j}{[l] + 1} \right)^k \\ &\leq ([l] + 1)^k \exp \frac{jk}{[l] + 1}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^k}{dt^k} \left( t^{[l]+1}(1-t)^{[l]+1} \right) \right| &\leq ([l] + 1)^k \sum_{j=0}^{[l]+1} C_{[l]+1}^j \left( e^{\frac{k}{[l]+1}} \right)^j \\ &= ([l] + 1)^k \left( 1 + e^{\frac{k}{[l]+1}} \right)^{[l]+1}, \end{aligned}$$

et prouve l'assertion. ✓

On en déduit le

**Lemme 5.** — *Soit*

$$g_{l,s}(x) = \prod_{j=1}^s (x_j(1-x_j))^{[l]+1},$$

alors  $\frac{g_{l,s}}{M_{l,s}} \in \Lambda_l(I^s)$ .

*Démonstration.* — On voit d'abord que  $g_{l,s} \in C^{[l]+1}(I^s) \subset C^m(I^s)$ , en tant que polynôme (où  $l = m + \alpha$ ).

Il s'agit de montrer que,  $\forall k = (k_1, \dots, k_s), 0 \leq |k| = k_1 + \dots + k_s \leq m$ ,

$$\left\| \frac{\partial^{|k|} g_{l,s}}{\partial x^k} \right\|_{\infty} = \left\| \frac{\partial^{|k|} g_{l,s}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_s^{k_s}} \right\|_{\infty} \leq M_{l,s},$$

et  $\forall k, |k| = m$ ,

$$\left\| \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k} \right\|_{\alpha} \leq M_{l,s}.$$

Pour la première estimation, prenons même  $k$ ,  $|k| = k_1 + \dots + k_s \leq [l] + 1$ , et soit  $x = (x_1, \dots, x_s) \in I^s$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{|k|} g_{l,s}}{\partial x^k}(x) &= \prod_{j=1}^s \frac{\partial^{k_j}}{\partial x_j^{k_j}} \left( x_j^{[l]+1} (1 - x_j)^{[l]+1} \right) \\ &= \prod_{j=1}^s \left( \frac{d^{k_j}}{dt^{k_j}} t^{[l]+1} (1 - t)^{[l]+1} \right) (x_j), \end{aligned}$$

ce qui donne, par le lemme précédent puisque  $0 \leq k_j \leq [l] + 1$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{|k|} g_{l,s}}{\partial x^k} \right\|_{\infty} &\leq \prod_{j=1}^s (1 + e)^{[l]+1} ([l] + 1)^{k_j} \\ &= (1 + e)^{s([l]+1)} ([l] + 1)^{|k|} \\ &\leq M_{l,s}. \end{aligned}$$

Si  $l$  n'est pas entier, cela prouve l'estimation. Si  $l$  est entier, on a montré un peu plus puisque  $[l] = m + 1$  :  $g_{l,s} \in C^{m+1}(I^s)$  et  $\left\| \frac{1}{M_{l,s}} \frac{\partial^{m+1} g_{l,s}}{\partial x^k} \right\|_{\infty} \leq 1$ .

Pour la seconde majoration, on a par les accroissements finis et Cauchy-Schwarz :  $\forall k, |k| = m, \forall x, y \in I^s$ ,

$$\left| \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k}(x) - \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k}(y) \right| \leq \left\| \vec{\nabla} \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k} \right\| \|x - y\|,$$

soit puisque  $\|x - y\| \leq \|x - y\|^\alpha$ ,

$$\left\| \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k} \right\|_{\alpha} \leq \left( \sum_{j=1}^s \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k} \right) \right\|_{\infty}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque  $m + 1 \leq [l] + 1$ , on obtient d'après la première estimation,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k} \right\|_{\alpha} &\leq \left( \sum_{j=1}^s \left( (1 + e)^{s([l]+1)} ([l] + 1)^{[l]+1} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{s} (1 + e)^{s([l]+1)} ([l] + 1)^{[l]+1}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. ✓

On peut donc prouver la proposition 2.

*Démonstration.* —  $f_\varepsilon$  est effectivement bien définie sur  $I^s$  car elle s'annule sur les bords des  $K_i$ . D'autre part,  $g_{l,s} \in C^{[l]}(I^s)$  et toutes ses dérivées partielles jusqu'à  $[l]$  (qui sont continues sur  $I^s$ ) s'annulent sur le bord de  $I^s$ , ce qui montre que  $f_\varepsilon$  construite par recollements, est également dans  $C^{[l]}(I^s) \subset C^m(I^s)$ .

On vérifie ensuite que la fonction définie sur  $[0, \frac{1}{r}]^s$  par

$$x \mapsto \frac{1}{r^l} \frac{g_{l,s}(rx)}{M_{l,s}},$$

est bien dans  $\Lambda_{l,s}([0, \frac{1}{r}]^s)$ . En effet, d'après le lemme 5,  $\forall |k| \leq m, \forall x \in [0, \frac{1}{r}]^s$ ,

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_s}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_s^{k_s}}(g_{l,s}(rx_1, \dots, rx_s)) = r^{k_1+\dots+k_s} \left( \frac{\partial^{|k|} g_{l,s}}{\partial x^k} \right)(rx),$$

et donc

$$\frac{1}{r^l} \left| \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k} (g_{l,s}(rx)) \right| \leq \frac{1}{r^{l-|k|}} M_{l,s} \leq M_{l,s}.$$

De même, si  $x \neq y$ ,  $|k| = m$ , alors  $rx, ry \in I^s$ , et :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|x-y\|^\alpha} \left| \frac{\partial^m}{\partial x^k} (g_{l,s}(rx)) - \frac{\partial^m}{\partial x^k} (g_{l,s}(ry)) \right| &= \frac{r^\alpha}{\|rx-ry\|^\alpha} r^m \left| \left( \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k} \right)(rx) - \left( \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k} \right)(ry) \right| \\ &\leq r^l M_{l,s}. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $f_\varepsilon$  a toutes ses dérivées d'ordre  $\leq m$  bornées par 1 en norme uniforme sur  $I^s$ , car  $\forall K_i, \forall |k| \leq m$ ,

$$\left\| \frac{\partial^{|k|} f_\varepsilon}{\partial x^k} \right\|_{K_i} = \frac{1}{2M_{l,s}} \left\| \frac{\partial^{|k|} g_{l,s}}{\partial x^k} \right\|_\infty \leq \frac{1}{2} \leq 1.$$

Reste à s'assurer que,  $\forall |k| = m$ ,

$$\left\| \frac{\partial^m f_\varepsilon}{\partial x^k} \right\|_\alpha \leq 1.$$

C'est immédiat si  $x$  et  $y$  sont dans le même cube  $K_i$ , et c'est même majoré par  $\frac{1}{2}$ . Sinon, on a  $x \in K_{i_x}, y \in K_{i_y}$ , avec  $i_x \neq i_y$ . Le segment  $[x, y]$  va donc respectivement couper les bords de  $K_{i_x}$  et  $K_{i_y}$  en  $z_x$  et  $z_y$  (si  $x$  est sur le bord de  $K_{i_x}$ , on prend  $z_x = x$  ; sinon, l'élément  $z_x$  est bien défini ; de même pour  $y$ ), ce qui donne, puisque  $\frac{\partial^m f_\varepsilon}{\partial x^k}(z_x) = \frac{\partial^m f_\varepsilon}{\partial x^k}(z_y) = 0$ , et  $\|x - z_x\|, \|y - z_y\| \leq \|x - y\|$ ,

$$\frac{\left| \frac{\partial^m f_\varepsilon}{\partial x^k}(x) \right|}{\|x - y\|^\alpha} \leq \frac{\left| \frac{\partial^m f_\varepsilon}{\partial x^k}(x) - \frac{\partial^m f_\varepsilon}{\partial x^k}(z_x) \right|}{\|x - z_x\|^\alpha} \leq \frac{1}{2},$$

dans le cas où  $x \neq z_x$ . Sinon,  $x$  est sur le bord de  $K_{i_x}$ , donc  $\frac{\partial^m f_\varepsilon}{\partial x^k}(x) = 0$ , et la majoration est triviale.

De même,

$$\frac{\left| \frac{\partial^m f_\varepsilon}{\partial x^k}(y) \right|}{\|x - y\|^\alpha} \leq \frac{1}{2},$$

donc

$$\frac{\left| \frac{\partial^m f_\varepsilon}{\partial x^k}(x) - \frac{\partial^m f_\varepsilon}{\partial x^k}(y) \right|}{\|x - y\|^\alpha} \leq \frac{\left| \frac{\partial^m f_\varepsilon}{\partial x^k}(x) \right|}{\|x - y\|^\alpha} + \frac{\left| \frac{\partial^m f_\varepsilon}{\partial x^k}(y) \right|}{\|x - y\|^\alpha} \leq 1,$$

ce qui donne la majoration cherchée pour tout  $|k| \leq m$ , et prouve l'assertion.  $\checkmark$

**Remarque 2.** — Comme on l’a vu auparavant, pour  $l$  entier  $\geq 1$ ,  $g_{l,s}$  et  $f_\varepsilon$  sont toujours dans l’espace  $C^l(I^s)$  usuel :  $g_{l,s}$  comme restriction d’un polynôme, et  $f_\varepsilon$  puisque ses dérivées partielles sont continues sur chacun des  $K_i$  et qu’elles s’annulent sur les bords des  $K_i$ . En particulier,  $f_\varepsilon \in \Lambda_{l,s}$ , car par définition,  $m = l - 1$ ,  $\alpha = 1$ , et  $f_\varepsilon$  admet des dérivées partielles continues d’ordre  $l - 1$ , qui sont lipschitziennes. Ainsi, le théorème 3 pourra également se formuler avec le compact  $\Lambda_{l,s} \cap C^l(I^s)$ .

**4.3. Preuve du théorème de Vitushkin et quelques conséquences.** — On est maintenant en mesure de donner la preuve du théorème 3.

*Démonstration.* — Traitons dans un premier temps le cas continu, qui utilise la première assertion du corollaire 4.  $q$  étant donné, il s’agit de montrer qu’il existe  $\eta(q)$  tel que, pour toute suite  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ , il existe  $f \in \Lambda_{l,s}$  et  $q$  formes linéaires  $\lambda_j$  de norme  $\leq 1$  sur  $C(I^s)$  qui vérifient

$$\varepsilon_j \lambda_j(f) \geq \eta(q), \quad j = 1, \dots, q$$

(cette condition traduit la mesure d’oscillation arbitraire de  $\Lambda_{l,s}$  autour de 0 ; c’est une idée qui rejoint la définition d’ $\eta$ -capacité, cf [8]). Cela entraînera

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \geq \eta(q).$$

En effet, étant donné  $P \in \mathcal{P}_{n,d}$ , en prenant  $q \geq 8n \log d$  et  $\varepsilon$  comme dans le corollaire 4, et  $\eta(q)$ ,  $f$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  associés, on aura, puisque  $\|\lambda_j\| \leq 1$ ,

$$\sup_{h \in \Lambda_{l,s}} \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|h - P(\zeta)\|_\infty \geq \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|f - P(\zeta)\|_\infty \geq \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \sup_{1 \leq j \leq q} |\lambda_j(f) - \lambda_j(P(\zeta))|.$$

Pour tout  $j$ ,  $p_j(\zeta) := \lambda_j(P(\zeta))$  est un polynôme réel à  $n$  variables de degré au plus  $d$ . D’après le corollaire 4, pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ , la suite  $\text{sgn } P(\zeta) = (\text{sgn } p_1(\zeta), \dots, \text{sgn } p_q(\zeta))$  diffère de  $\varepsilon$  d’au moins une place :  $\exists k, \varepsilon_k \neq \text{sgn } p_k(\zeta)$  ( $\text{sgn } p_k(\zeta)$  peut être nul). Dans ce cas,

$$\sup_{1 \leq j \leq q} |\lambda_j(f) - \lambda_j(P(\zeta))| \geq |\lambda_k(f) - p_k(\zeta)| \geq |\lambda_k(f)| \geq \eta(q),$$

ce qui démontre l’inégalité cherchée pour  $P$  fixé. L’arbitraire sur  $P \in \mathcal{P}_{n,d}$  nous donne finalement

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \geq \eta(q).$$

Choisissons alors un entier  $r \geq 1$ , tel que  $q = r^s \geq 8n \log d$ , donnons-nous la suite  $\varepsilon$  grâce au corollaire 4, ainsi que  $f_\varepsilon$  construite à partir du pavage de  $I^s$ . On sait d’après la proposition 2 que  $f_\varepsilon \in \Lambda_{l,s}$ .

Prenons alors pour les  $\lambda_i$  les morphismes d’évaluation en les centres des  $K_i$ . On a

$$\lambda_i(f_\varepsilon) = \varepsilon_i \|f_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon_i \frac{g_{l,s}(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})}{2r^l M_{l,s}} = \varepsilon_i \frac{1}{2M_{l,s} 4^{s(l+1)} r^l}.$$

En particulier, si  $r$  est le plus petit entier ( $\geq 2$ ) tel que  $r^s \geq 8n \log d$ , on a

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{2(r-1)} \geq \frac{1}{2(8n \log d)^{\frac{1}{s}}},$$

soit

$$\varepsilon_i \lambda_i(f_\varepsilon) \geq \frac{1}{2M_{l,s} 4^{s([l]+1)} 2^l 8^{\frac{l}{s}} (n \log d)^{\frac{l}{s}}},$$

ce qui permet de conclure pour le cas continu :

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \geq \frac{C_\infty(l,s)}{(n \log d)^{\frac{l}{s}}},$$

avec

$$C_\infty(l,s) = \frac{1}{2^{l+1} 4^{s([l]+1)} 8^{\frac{l}{s}} M_{l,s}}.$$

Traisons maintenant le cas intégrable (qui utilise la deuxième assertion du corollaire 4). Comme pour le cas continu, choisissons  $q = r^s$ ,  $r \geq 2$ , tel que  $r^s$  soit le plus petit entier  $\geq 18n \log d$ .

Soient  $\varepsilon$  une suite,  $f_\varepsilon \in \Lambda_{l,s}$  la fonction associée, et pour les  $\lambda_i$ , posons

$$\lambda_i(h) = \int_{K_i} h(x) dx.$$

On a alors

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i(h)| \leq \sum_{i=1}^m \int_{K_i} |h(x)| dx = \|h\|_{L^1},$$

donc

$$\sum_{i=1}^m \|\lambda_i\| \leq 1.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \lambda_i(f_\varepsilon) &= \varepsilon_i \frac{1}{2r^l M_{l,s}} \int_{[0, \frac{1}{r}]^s} g_{l,s}(ry) dy \\ &= \varepsilon_i \frac{1}{2r^l M_{l,s} r^s} \int_{[0,1]^s} \prod_{j=1}^s (x_j(1-x_j))^{[l]+1} dx_1 \dots dx_s \\ &= \varepsilon_i \frac{1}{2r^l M_{l,s} r^s} \left( \int_0^1 (t(1-t))^{[l]+1} dt \right)^s. \end{aligned}$$

On peut calculer cette intégrale par intégrations par parties successives, ce qui nous donne

$$\int_0^1 (t(1-t))^{[l]+1} dt = \frac{(([l]+1)!)^2}{(2[l]+3)!},$$

et donc

$$\varepsilon_i \lambda_i(f_\varepsilon) \geq \frac{(([l]+1)!)^{2s}}{2M_{l,s} ((2[l]+3)!)^s r^l r^s},$$

ce qui montre une propriété analogue d'oscillation arbitraire de  $\Lambda_{l,s}$  autour de 0.

Soit alors  $P \in \mathcal{P}_{n,d}$  ; les  $p_i(\zeta) = \lambda_i(P(\zeta))$  sont des polynômes réels à  $n$  variables de degré  $\leq d$ . D'après le corollaire et par hypothèse sur  $q = r^s$ , il existe une suite  $\varepsilon$

qui diffère d'au moins  $\frac{q}{10}$  places de  $\text{sgn } P(\zeta) = (\text{sgn } p_1(\zeta), \dots, \text{sgn } p_q(\zeta))$ ,  $\forall \zeta \in \mathbb{R}^n$ , ce qui entraîne, puisque  $\sum_{i=1}^q \|\lambda_i\| \leq 1$ ,

$$\sup_{h \in \Lambda_{l,s}} \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|h - P(\zeta)\|_{L^1} \geq \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|f_\varepsilon - P(\zeta)\|_{L^1} \geq \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^q |\lambda_i(f_\varepsilon) - \lambda_i(P(\zeta))|.$$

Comme, pour au moins  $\frac{q}{10}$  indices  $i$ , on a

$$|\lambda_i(f_\varepsilon) - p_i(\zeta)| \geq \varepsilon_i \lambda_i(f_\varepsilon),$$

il vient

$$\inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|f_\varepsilon - P(\zeta)\| \geq \frac{q}{10} \frac{((l+1)!)^{2s}}{r^s 2M_{l,s}((2[l]+3)!)^s r^l} = \frac{((l+1)!)^{2s}}{20M_{l,s}((2[l]+3)!)^s r^l}.$$

Enfin, le fait d'avoir ici encore

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{2(18n \log d)^{\frac{1}{s}}},$$

et l'arbitraire sur  $P \in \mathcal{P}_{n,d}$  aboutissent à

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \geq \frac{C_{L^1}(l,s)}{(n \log d)^{\frac{1}{s}}},$$

avec

$$C_{L^1}(l,s) = \frac{((l+1)!)^{2s}}{20M_{l,s} 2^l 18^{\frac{l}{s}} ((2[l]+3)!)^s},$$

ce qui achève la preuve dans le cas  $L^1(I^s)$ , et prouve le théorème. ✓

On peut en particulier expliciter les constantes de minoration.

**Corollaire 5.** — *On a : pour le cas continu,*

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \geq \frac{C_\infty(l,s)}{(n \log d)^{\frac{1}{s}}},$$

où

$$C_\infty(l,s) = \frac{1}{\sqrt{s} 2^{l+1} 8^{\frac{l}{s}} ([l]+1)^{[l]+1} (4(1+e))^{s([l]+1)}};$$

et pour le cas  $L^1$ ,

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \geq \frac{C_{L^1}(l,s)}{(n \log d)^{\frac{1}{s}}},$$

où

$$C_{L^1}(l,s) = \frac{((l+1)!)^{2s}}{5\sqrt{s} 2^{l+2} 18^{\frac{l}{s}} ([l]+1)^{[l]+1} ((2[l]+3)!)^s (1+e)^{s([l]+1)}}.$$

En particulier, on trouve pour la constante  $C'$  du théorème 1 :

$$C'_\infty = \frac{3}{\sqrt{s} 2^{l+3} 8^{\frac{l}{s}} ([l] + 1)^{[l]+1} (4(1+e))^{s([l]+1)} [d(r+1) + v + t]^{\frac{l}{s}}} \\ \times \frac{1}{\left[ \log \left[ 2ebud 2^{(4e+1)d} B^d \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \log \left( A\sqrt{s} 2^{l+3} 8^{\frac{l}{s}} ([l] + 1)^{[l]+1} (4(1+e))^{s([l]+1)} \right) \right] \right]^{\frac{l}{s}}},$$

et

$$C'_{L^1} = \frac{3((l+1)!)^{2s}}{5\sqrt{s} 2^{l+4} 18^{\frac{l}{s}} ([l] + 1)^{[l]+1} ((2[l] + 3)!)^s (1+e)^{s([l]+1)} [(d(r+1) + v + t)]^{\frac{l}{s}}} \\ \times \frac{1}{\left[ \log \left[ 2ebud 2^{(4e+1)d} B^d \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \log \left( \frac{5A\sqrt{s} 2^{l+4} 18^{\frac{l}{s}} ([l]+1)^{[l]+1} ((2[l]+3)!)^s (1+e)^{s([l]+1)}}{((l+1)!)^{2s}} \right) \right] \right]^{\frac{l}{s}}}.$$

Pour justifier la preuve du corollaire 1, on a besoin d'un résultat donnant quelques restrictions sur la fonction  $h = f_\varepsilon$ , quitte à diminuer la constante  $C_\infty(l, 1)$ .

**Corollaire 6.** — Dans l'énoncé du théorème 3, on peut de plus prendre  $h$  nulle sur un sous-intervalle  $[0, \delta]$  (ici  $[0, \frac{1}{20}]$ ).

En particulier, cela justifie ce qu'on a dit dans la remarque 1, et permet surtout de prendre  $h$  (intervenant dans la preuve des théorèmes 1 et 2) qui vérifie pour le cas continu :

$$\begin{cases} \frac{C'_\infty(l, s)}{(n \log K)^{\frac{l}{s}}} \leq \|h\|_\infty = |h(x(\zeta))| \leq \frac{2^l C'_\infty(l, s)}{(n \log K)^{\frac{l}{s}}}, \\ h(x(\zeta), \zeta) P_K(x(\zeta), \zeta) \leq 0 \\ h(x) = 0, \forall x \in [0, \frac{1}{20}]. \end{cases}$$

(avec une autre constante  $C'_\infty(l, s) \leq C_\infty(l, s)$ )

Cela justifie finalement les hypothèses supplémentaires utilisées dans la preuve des corollaires 1 et 2.

*Démonstration.* — Il suffit juste de s'assurer que l'élément  $x(\zeta)$  peut être choisi dans l'intervalle  $[\frac{1}{20}, 1]$ , ce qui découle de la seconde assertion du corollaire 4 : si  $q \geq 18n \log d$ , il existe une suite  $\varepsilon$  qui diffère de plus de  $\frac{q}{10}$  places de toute suite  $\text{sgn } P(\zeta)$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ . Il existe donc au moins une place pour  $x(\zeta)$  se trouvant en dehors de

$$\left[0, \frac{1}{q}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{k-1}{q}, \frac{k}{q}\right] \supset \left[0, \frac{1}{20}\right].$$

$k$  étant le plus grand entier  $\leq \frac{q}{10}$ . Il ne reste plus qu'à changer  $h$  en 0 sur  $\left[0, \frac{k}{q}\right]$ .

✓

## 5. Application à un problème inverse

**5.1. Quelques rappels et motivation du problème.** — On se donne l'équation de Sturm-Liouville sur la demi-droite  $\mathbb{R}^+$

$$-y''(x) - \omega^2 Q(x) = \lambda y(x),$$

avec les hypothèses suivantes :  $-\omega^2 Q$  est un potentiel strictement négatif, intégrable avec  $m + 1$  dérivées à décroissance polynomiale en l'infini.

On sait que pour tout  $\omega$  assez grand, l'opérateur  $-\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 Q$  admet  $N(\omega)$  valeurs propres discrètes négatives  $\lambda_j = -\xi_j^2$ ,  $0 < \xi_1 < \dots < \xi_N$ , et  $N(\omega)$  fonctions propres  $\varphi_j$  qui vérifient les conditions aux bords :

$$\varphi_j(0) = 0, \text{ et } \int_0^\infty |\varphi_j(x)|^2 dx = 1.$$

En outre,  $N(\omega)$  est du même ordre de grandeur que  $\omega$  ; plus précisément, on dispose de la borne de Calogero  $N(\omega) \leq \omega^{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{Q(x)} dx$  (cf. [9], [16]), et même d'un encadrement : pour tout  $\omega$  assez grand,  $a\omega \leq N(\omega) \leq b\omega$ .

On considère ici un problème inverse : étant données les  $N(\omega)$  valeurs propres

$$\lambda_j = -\xi_j^2$$

et valeurs caractéristiques

$$C_j = (\varphi_j'(0))^2,$$

$j = 1, \dots, N(\omega)$ , il s'agit de reconstruire le potentiel  $-\omega^2 Q$  sur  $\mathbb{R}^+$ . C'est un cas particulier d'un problème plus général qui consiste, à partir de données sur les fonctions propres, à retrouver  $Q$ . On s'intéresse essentiellement au cas où les informations sont données par la fonction de Weyl, définie par

$$j(k) = \frac{\varphi'(0, k)}{\varphi(0, k)}, \quad \Im k > 0,$$

où  $\varphi$  est une solution  $L^2$ -intégrable de l'équation avec  $\lambda = k^2$ . C'est une fonction méromorphe dont les pôles sont exactement les valeurs propres  $\xi_j$  de l'équation, et dont les résidus sont (à  $2i\xi_j$  près) les valeurs caractéristiques  $C_j$ . La connaissance de cette fonction permet de déterminer la mesure spectrale  $\sigma(d\tau)$  de l'équation définie par

$$\sigma(d\tau) = \begin{cases} \sigma_+(d\tau), & \tau \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{N(\omega)} C_j \delta(\tau + \xi_j^2), & \tau < 0, \end{cases}$$

où  $\sigma_+$  est une mesure positive à densité, et  $\delta$  la mesure de Dirac. Grâce aux travaux de Gelfand et Levitan (cf [3], [10]), on est alors capable de reconstruire  $Q$ .

On va ici considérer le cas où seuls sont connus les paramètres  $\xi_j$  et  $C_j$ , ainsi que  $Q$  et ses premières dérivées en 0. On a pour cela les résultats de G. H. Henkin et N. N. Novikova dans [5] (théorème 1, p. 21) : sous certaines hypothèses de régularité de  $Q$



(que l'on suppose avec  $m+1$  dérivées intégrables), on peut l'approcher, uniformément sur tout intervalle  $[0, X]$ , par une fonction  $Q_\omega$  à l'ordre  $\frac{1}{\omega^m}$ , déduite du potentiel

$$q_\omega(x) = -\omega^2 Q_\omega(x),$$

associé à la mesure spectrale explicite  $\sigma_\omega(d\tau)$  construite à partir des  $\xi_j$ ,  $C_j$  et des  $Q^{(s)}(0)$ ,  $s = 0, \dots, m$ .

Pour  $m = 1$ , on dispose d'un potentiel explicite  $q_\omega^0 = -\omega^2 Q_\omega^0$ , défini par (cf [5], p. 23)

$$Q_\omega^0(x) = \frac{2}{\omega^2} \frac{d^2}{dx^2} \ln |\det W_{s,r}(x)|,$$

où

$$W_{s,r}(x) = \frac{2sh(\xi_s + \xi_r)x}{\xi_s + \xi_r} - (1 - \delta_{s,r}) \frac{2sh(\xi_s - \xi_r)x}{\xi_s - \xi_r} - \delta_{s,r} \left( 2x - \frac{4\xi_r^2}{C_r} \right),$$

$s, r = 1, \dots, N(\omega)$ , et qui vérifie, uniformément sur tout  $[0, X]$ ,

$$\left| \int_0^x Q(y) dy - \int_0^x Q_\omega^0(x) \right| = O\left(\frac{\ln \omega}{\sqrt{\omega}}\right).$$

Une question alors assez naturelle concerne le problème de l'optimalité d'une telle formule approximation : G. Henkin a conjecturé dans [5] p. 22, qu'une telle formule utilisant  $2N$  paramètres (à savoir les  $\xi_j$ ,  $C_j$ ) ne pouvait pas approcher uniformément une fonction en position générale avec  $m$  dérivées bornées (soit le compact  $\Lambda_m$ ), essentiellement mieux qu'à l'ordre  $\frac{1}{\omega^m}$ . En d'autres termes, peut-on trouver, du moins prouver l'existence d'une formule qui réaliserait une approximation meilleure ?

En supposant qu'une telle formule donnée s'écrit comme une fonction analytique en les paramètres  $\xi_j$ ,  $C_j$  (et  $Q^{(s)}(0)$ ), et en faisant le lien avec les résultats négatifs prouvés dans la partie 3, on va pouvoir donner des bornes inférieures qui ne peuvent pas être franchies.

## 5.2. Une estimation des valeurs propres et valeurs caractéristiques. —

On a besoin d'établir les encadrements suivants pour pouvoir appliquer les résultats négatifs.

**Proposition 3.** — *Supposons que  $q = -\omega^2 Q$  soit un potentiel négatif, où  $Q > 0$  est intégrable de classe  $C^1$  avec  $Q'(0) = 0$ , strictement décroissant sur  $\mathbb{R}^+$  et à décroissance polynomiale à l'infini. Alors pour tous  $\omega$  assez grand et  $j = 1, \dots, N(\omega)$ , on a*

$$\frac{a}{\omega^b} \leq \xi_j \leq c\omega, \text{ et } \frac{1}{\alpha \exp(\beta\omega^\gamma)} \leq \frac{4\xi_j^2}{C_j} \leq \alpha \exp(\beta\omega^\gamma),$$

où  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  sont des constantes ne dépendant que de  $Q$ .

Cette proposition étant un corollaire de la théorie WKB qui n'est pas précisément formulé dans les références, nous allons en donner une preuve abrégée en utilisant principalement la méthode WKB comme dans [9].

*Démonstration.* — D'abord, l'estimation  $\xi_j \leq c\omega$  est immédiate : car si  $\phi_j$  est une fonction propre normée associée, on a

$$\begin{aligned} -\xi_j^2 = \lambda_j &= -\int_0^\infty \phi_j'' \phi_j dx - \omega^2 \int_0^\infty Q \phi_j^2 dx \\ &\geq -[\phi_j' \phi_j]_0^\infty + \int_0^\infty \phi_j'^2 dx - \omega^2 \inf_{[0, +\infty[} Q \\ &\geq -\omega^2 \sup_{[0, +\infty[} Q, \end{aligned}$$

soit

$$\xi_j \leq \omega \sup_{[0, +\infty[} \sqrt{Q(x)}.$$

Passons maintenant à la minoration de  $\xi_j$  : d'abord, quitte à diviser par  $Q(0)$ , on peut supposer  $Q(0) = 1$ . De plus,  $Q$  est par hypothèse strictement décroissant sur  $\mathbb{R}^+$ , donc admet 0 comme unique maximum. Pour adapter la méthode de WKB par Lax et Levermore dans [9], on doit prolonger l'équation dans  $\mathbb{R}$  tout entier de la manière suivante : on prolonge  $Q$  en  $\tilde{Q}$  par parité, ce qui fait de  $\tilde{q} = -\omega^2 \tilde{Q}$  un potentiel négatif, intégrable à décroissance polynomiale et de classe  $C^1$  (puisque  $Q'(0) = 0$ ), et qui est monotone sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\mathbb{R}^-$ , avec 0 comme unique minimum sur  $\mathbb{R}$  (on continuera de noter  $Q$  le prolongement).

Quant à chaque fonction propre  $\phi_j$ , on la prolonge par imparité, ce qui est possible car  $\phi_j(0) = 0$ , et nous donne une fonction  $\tilde{\phi}_j$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  (puisque  $\phi_j''(0) = 0$ ).

On vérifie immédiatement que chaque  $\tilde{\phi}_j$  est fonction propre de l'opérateur  $-\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 Q$ , avec la même valeur propre  $\lambda_j = -\xi_j^2$  ; inversement, par restriction sur  $\mathbb{R}^+$ , toute fonction propre sur  $\mathbb{R}$  est l'une des  $\phi_j$ , ce qui montre qu'on les a toutes.

On se place finalement dans le cadre quasi-classique en ramenant l'équation à

$$-\varepsilon^2 y'' - Qy = -\eta^2 y,$$

où  $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$  et  $\eta_j = \frac{\xi_{N-j+1}}{\omega}$ ,  $j = 1, \dots, N$ . On a donc

$$0 \leq \eta_N \leq \dots \leq \eta_1 \leq 1.$$

En appliquant la méthode WKB, on a :

$$\Phi(\eta_j) = \left(j - \frac{1}{2}\right) \varepsilon \pi,$$

où

$$\Phi(\eta) = \int_{x_-(\eta)}^{x_+(\eta)} (Q(y) - \eta^2)^{\frac{1}{2}} dy,$$

avec  $x_+(\eta) > 0$ ,  $x_-(\eta) < 0$  vérifiant  $-Q(x_+(\eta)) = -Q(x_-(\eta)) = -\eta^2$  (tout est intégrable car  $Q$  est suffisamment régulière à l'infini).

On a aussi

$$N(\omega) = N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon \pi} \Phi(0) \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon \pi} \int_{-\infty}^{\infty} (Q(y))^{\frac{1}{2}} dy \right\rceil.$$

Et pour finir,

$$s_j = s(\eta_j) = \exp\left(\frac{\theta_+(\eta_j)}{\varepsilon}\right),$$

où

$$\theta_+(\eta) = \eta x_+(\eta) + \int_{x_+(\eta)}^{\infty} \eta - (\eta^2 - Q(y))^{\frac{1}{2}} dy,$$

et  $s_j$  est le coefficient normalisateur de la solution de Jost :

$$\phi_j(x) \sim s_j \exp\left(-\frac{\eta_j x}{\varepsilon}\right).$$

Ainsi, pour montrer l'estimation de  $\xi_j$ , il suffit de s'assurer que

$$\eta_N \geq \frac{a}{\omega^b}$$

(pour plus de clarté, on désignera par  $a$  plusieurs constantes différentes). Puisque par hypothèse, au voisinage de l'infini,

$$\frac{1}{a} \frac{1}{|x|^k} \leq Q(x) \leq \frac{a}{|x|^k},$$

(avec  $k \geq 4$ ) et que, pour  $\omega$  grand,  $\eta_N \rightarrow 0$ , on a (par exemple pour  $x_+(\eta_N)$ , le cas  $x_-(\eta_N)$  étant analogue)

$$\frac{1}{a} \frac{1}{x_+(\eta_N)^k} \leq Q(\eta_N) = \eta_N^2 \leq \frac{a}{(x_+(\eta_N))^k},$$

soit

$$\frac{1}{a} \frac{1}{(\eta_N)^{\frac{2}{k}}} \leq x_+(\eta_N) \leq \frac{a}{(\eta_N)^{\frac{2}{k}}}.$$

On a alors

$$\Phi(0) - \Phi(\eta_N) = \left( \int_{-\infty}^{x_-(\eta_N)} + \int_{x_+(\eta_N)}^{\infty} \right) (Q(y))^{\frac{1}{2}} dy + \int_{x_-(\eta_N)}^{x_+(\eta_N)} (Q(y))^{\frac{1}{2}} - (Q(y) - \eta_N^2)^{\frac{1}{2}} dy.$$

Or,

$$\int_{x_+(\eta_N)}^{\infty} (Q(y))^{\frac{1}{2}} dy = \int_0^{\frac{1}{x_+(\eta_N)}} \left( \frac{Q\left(\frac{1}{y}\right)}{y^4} \right)^{\frac{1}{2}} dy \leq \frac{a}{x_+(\eta_N)^{\frac{k-2}{2}}},$$

de même pour  $\int_{-\infty}^{x_-(\eta_N)} (Q(y))^{\frac{1}{2}} dy$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{x_-(\eta_N)}^{x_+(\eta_N)} (Q(y))^{\frac{1}{2}} - (Q(y) - \eta_N^2)^{\frac{1}{2}} dy &\leq \int_{x_-(\eta_N)}^{x_+(\eta_N)} (Q(y) - (Q(y) - \eta_N^2))^{\frac{1}{2}} dy \\ &= \eta_N (x_+(\eta_N) - x_-(\eta_N)), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\Phi(0) - \Phi(\eta_N) \leq a(\eta_N)^{1-\frac{2}{k}} + a(\eta_N)^{1-\frac{2}{k}} + a(\eta_N)^{1-\frac{2}{k}} = a(\eta_N)^{1-\frac{2}{k}}.$$

On a d'autre part  $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon\pi} \Phi(0) \right\rfloor \leq \frac{\Phi(0)}{\varepsilon\pi}$ , donc

$$\Phi(0) - \Phi(\eta_N) \geq \frac{\varepsilon\pi}{2},$$

et finalement

$$a(\eta_N)^{\frac{k-2}{k}} \geq \frac{\varepsilon\pi}{2},$$

soit

$$\eta_N \geq a\varepsilon^{\frac{k}{k-2}} = \frac{a}{\omega^{\frac{k}{k-2}}} \geq \frac{a}{\omega^2},$$

qui est l'estimation cherchée.

On passe maintenant à l'estimation de  $\frac{4\xi_j^2}{C_j}$ . On établit pour cela une formule explicite de  $C_j$  en reprenant [1] (chap. II).

On considère l'équation

$$-y'' - \omega^2 Qy = k^2 y,$$

de paramètre  $k$  dans le demi-plan complexe supérieur. Pour tout  $k$ ,  $\Im m k > 0$ , il existe toujours les solutions  $\phi(k, \cdot)$ ,  $\psi(k, \cdot)$ , et  $f(k, \cdot)$  qui vérifient respectivement

$$\begin{cases} \phi(k, \cdot) \in L^2([0, \infty[), \text{ et } \int_0^\infty |\phi(k, x)|^2 dx = 1. \\ \psi(k, 0) = 0 \text{ et } \psi'(k, 0) = 1. \\ f(k, x) \sim \exp(ikx), \text{ } x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

$\phi$  correspond à la solution physique et  $f$  est appelée solution de Jost. Lorsque  $k$  est une valeur propre  $k_j = i\xi_j$ ,  $\xi_j > 0$  (et seulement dans ce cas), ces trois solutions sont proportionnelles (et peuvent être prises réelles), et on a

$$\begin{cases} f(k_j, \cdot) = f'(k_j, 0)\psi(k_j, \cdot), \\ \phi(k_j, \cdot) = C_j^{\frac{1}{2}}\psi(k_j, \cdot), \\ \phi(k_j, \cdot) = s_j f(k_j, \cdot) \end{cases}$$

(les solutions  $\phi(k, \cdot)$  et  $f(k, \cdot)$  sont toujours proportionnelles puisque  $\Im m k > 0$ ), ce qui donne

$$f'(k_j, 0) = \frac{C_j^{\frac{1}{2}}}{s_j}.$$

On définit par ailleurs la fonction de Jost  $F$  par  $F(k) = f(k, 0)$ . Ce qui précède montre qu'elle admet exactement les valeurs propres comme zéros. On verra par la suite que c'est une fonction holomorphe sur le demi-plan supérieur et que ses zéros sont simples. On montre alors que

$$\frac{4\xi_j^2}{C_j} = -s_j^2 \left( \dot{F}(i\xi_j) \right)^2.$$

En effet, en dérivant par rapport à la variable  $k$  l'équation

$$-f''(k, x) - \omega^2 Q(x)f(k, x) = k^2 f(k, x),$$

la dérivée (par rapport à  $x$ ) du wronskien de  $f(k, x)$  et  $\dot{f}(k, x) = \frac{df}{dk}(k, x)$  vaut

$$\begin{aligned} W'(f, \dot{f}) &= \left( f(k, x)\dot{f}'(k, x) - f'(k, x)\dot{f}(k, x) \right)' \\ &= f(k, x)\dot{f}''(k, x) - f''(k, x)\dot{f}(k, x) \\ &= -2kf^2(k, x), \end{aligned}$$

ce qui donne, pour  $k = k_j$ ,

$$\begin{aligned} \dot{F}(k_j)f'(k_j, 0) &= -2k_j \int_0^\infty f^2(k_j, x)dx = -\frac{2k_j}{s_j^2}, \\ &= \dot{F}(k_j) \frac{C_j^{\frac{1}{2}}}{s_j}, \end{aligned}$$

et prouve l'expression annoncée.

On a par ailleurs pour la majoration de  $s_j$  :  $0 < \eta_N < \dots < \eta_1 \leq 1$ , donc  $0 \leq x_+(\eta_1) \leq \dots \leq x_+(\eta_N)$ , et

$$\theta_+(\eta_j) \leq x_+(\eta_N) + \int_0^\infty (Q(y))^{\frac{1}{2}} dy,$$

qui, en vertu des estimations précédentes, donne

$$\theta_+(\eta_j) \leq a\omega^{\frac{2}{k-2}},$$

et aboutit à

$$s_j \leq \exp\left(a\omega^{\frac{k}{k-2}}\right) \leq \exp(a\omega^2).$$

Et puisque  $s_j \geq 1$ , il suffit pour terminer la preuve de montrer un encadrement du même type pour  $\dot{F}(i\xi_j)$ , ce qui fait l'objet du lemme suivant.

✓

**Lemme 6.** — On a, pour tout  $j = 1, \dots, N(\omega)$ ,

$$\frac{1}{a \exp(b\omega^2)} \leq \left| \dot{F}(i\xi_j) \right| \leq a \exp(b\omega^2).$$

(les constantes  $a, b$  ne dépendent que de  $Q$ )

**Remarque 3.** — En particulier, on trouve, pour tout  $j = 1, \dots, N(\omega)$ ,

$$\frac{1}{a\omega} \leq \xi_j \leq a\omega,$$

et

$$\frac{1}{A \exp(b\omega^2)} \leq \frac{4\xi_j^2}{C_j} \leq A \exp(b\omega^2),$$

ce qui donne une majoration des exposants  $c$  et  $\gamma$  dans l'énoncé de la proposition 3.

*Démonstration.* — On commence pour cela par considérer l'équation

$$y'' - Vy = -k^2 y,$$

où  $x \geq 0$ ,  $V(x) = -\omega^2 Q(x)$  et  $\Im m k \geq 0$ . On peut construire la solution de Jost par approximations successives en posant

$$\begin{cases} f_0(k, x) = e^{ikx}, \\ f_n(k, x) = \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{k} V(t) f_{n-1}(t) dt, \end{cases}$$

ce qui donne

$$f(k, \cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k, \cdot), \text{ et } F(k) = f(k, 0)$$

pour la fonction de Jost. On sait (cf. [1]) que  $F$  est holomorphe sur le demi-plan  $\{\Im m k > 0\}$ , continue sur  $\{\Im m k \geq 0\}$ , s'annule exactement en les valeurs propres  $i\xi_j$ , et tend vers 1 à l'infini. Elle possède en outre l'estimation suivante :  $\forall x, k$ ,

$$|f_n(k, x)| \leq \exp(-\Im m kx) \frac{1}{n!} \left( \int_x^\infty \frac{2\sqrt{2}t}{1+|k|t} |V(t)| dt \right)^n,$$

ce qui donne, pour tout  $k$ ,

$$\begin{aligned} |F(k)| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(k, x)| \leq \exp \left( 2\sqrt{2} \omega^2 \int_0^\infty t |Q(t)| dt \right) \\ &= \exp(a\omega^2), \end{aligned}$$

où  $a = a(Q)$  ne dépend pas de  $\omega$ . Pour tout  $i\xi_j$ , en appliquant la formule de Cauchy sur un petit disque  $D(i\xi_j, \varepsilon)$  contenu dans le domaine d'holomorphie de  $F$ , on a alors

$$\left| \dot{F}(i\xi_j) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|k-i\xi_j|=\varepsilon} \frac{F(k)}{(k-i\xi_j)^2} dk \right| \leq \frac{\|F\|_\infty}{\varepsilon}.$$

On peut prendre  $\varepsilon = \frac{\xi_1}{2}$ ,  $\xi_1 = \omega\eta_N$  étant la plus petite valeur propre et qui est  $\geq \frac{b}{\omega}$  d'après ce qui précède, ce qui donne, pour tout  $j = 1, \dots, N$ ,

$$\left| \dot{F}(i\xi_j) \right| \leq b\omega \exp(a\omega^2) \leq b' \exp(a'\omega^2),$$

et prouve la majoration cherchée.

Pour la minoration, on commence par poser

$$\tilde{F}(k) = \frac{F(k)}{\prod_{l=1}^N \frac{k-i\xi_l}{k+i\xi_l}}.$$

Alors  $\tilde{F}$  est aussi continue sur le demi-plan fermé, holomorphe à l'intérieur, tend vers 1 à l'infini, et est sans zéro. En particulier,

$$\begin{aligned}\dot{F}(i\xi_j) &= \frac{d}{dk} \left( \prod_{l=1}^N \frac{k - i\xi_l}{k + i\xi_l} \right) (i\xi_j) \tilde{F}(i\xi_j) \\ &= \frac{1}{2i\xi_j} \left( \prod_{l \neq j} \frac{\xi_j - \xi_l}{\xi_j + \xi_l} \right) \tilde{F}(i\xi_j).\end{aligned}$$

On a d'abord  $\xi_j \leq \xi_N \leq b\omega$ . Ensuite, pour minorer l'écart  $|\xi_j - \xi_l|$ , bien qu'on puisse supposer la répartition asymptotique des valeurs propres approximativement uniforme, on va montrer une estimation plus faible, mais suffisante :

$$\forall j, l, 1 \leq j < l \leq N, \eta_j - \eta_l \geq \frac{a}{\omega^2}.$$

En effet,

$$\eta_j - \eta_l \geq \min_{1 \leq l \leq N-1} (\eta_l - \eta_{l+1}),$$

et

$$\frac{\pi}{\omega} = \Phi(\eta_{l+1}) - \Phi(\eta_l) = \int_{x_-(\eta_{l+1})}^{x_+(\eta_{l+1})} (Q(y) - \eta_{l+1}^2)^{\frac{1}{2}} dy - \int_{x_-(\eta_l)}^{x_+(\eta_l)} (Q(y) - \eta_l^2)^{\frac{1}{2}} dy.$$

Sur  $[x_+(\eta_l), x_+(\eta_{l+1})]$  (resp.  $[x_-(\eta_{l+1}), x_-(\eta_l)]$ ), on a  $-\eta_l^2 \leq -Q(y) \leq -\eta_{l+1}^2$ , donc

$$Q(y) - \eta_{l+1}^2 \leq \eta_l^2 - \eta_{l+1}^2,$$

et sur  $[x_-(\eta_l), x_+(\eta_l)]$ ,

$$(Q(y) - \eta_{l+1}^2)^{\frac{1}{2}} - (Q(y) - \eta_l^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\eta_l^2 - \eta_{l+1}^2)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\omega} &\leq (\eta_l - \eta_{l+1})^{\frac{1}{2}} (\eta_l + \eta_{l+1})^{\frac{1}{2}} (x_+(\eta_{l+1}) - x_-(\eta_{l+1})) \\ &\leq \sqrt{2} (\eta_l - \eta_{l+1})^{\frac{1}{2}} (x_+(\eta_{l+1}) - x_-(\eta_{l+1}))\end{aligned}$$

Or,

$$x_+(\eta_{l+1}) - x_-(\eta_{l+1}) \leq x_+(\eta_N) - x_-(\eta_N) \leq a\omega^{\frac{2}{k-2}},$$

et donc

$$\eta_l - \eta_{l+1} \geq \frac{a}{\omega^{\frac{k}{k-2}}} \geq \frac{a}{\omega^2}.$$

On en déduit

$$\prod_{l \neq j} \left| \frac{\xi_j - \xi_l}{\xi_j + \xi_l} \right| \geq \left( \frac{a}{2\omega^2} \right)^{N-1} \geq \frac{a''}{\exp(b''\omega^2)}.$$

Il ne reste donc plus qu'à minorer  $|\tilde{F}(i\xi_j)|$  :  $\tilde{F}$  étant holomorphe sans zéro, on a pour tout  $R$  assez grand :

$$\frac{1}{4i\xi_j \tilde{F}(i\xi_j)} = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{-R}^R \frac{k}{\tilde{F}(k)(k - i\xi_j)(k + i\xi_j)^2} dk + \int_0^\pi \frac{iR^2 e^{2i\theta}}{\tilde{F}(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} - i\xi_j)(Re^{i\theta} + i\xi_j)^2} d\theta \right),$$

qui donne à la limite (puisque  $\tilde{F}(k) \rightarrow 1$ )

$$\frac{1}{\tilde{F}(i\xi_j)} = \frac{4i\xi_j}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\tilde{F}(k)(k - i\xi_j)(k + i\xi_j)^2} dk,$$

soit

$$\frac{1}{|\tilde{F}(i\xi_j)|} \leq \frac{4\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{k}{|F(k)| |k - i\xi_j| |k + i\xi_j|^2} dk,$$

car,  $\forall k \in \mathbb{R}$ ,  $|\tilde{F}(k)| = |F(k)|$ , et  $F(-k) = \overline{F(k)}$ .

En reprenant les estimations de la solution de Jost, on a pour tout  $k > 0$  :

$$\begin{aligned} |F(k) - 1| &\leq \sum_{n \geq 1} |f_n(k, 0)| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left( \int_0^\infty \frac{2\sqrt{2}}{k} |V(t)| dt \right)^n \\ &\leq \frac{\omega^2}{k} \int_0^\infty 2\sqrt{2} |Q(t)| dt \exp \left( \omega^2 \int_0^\infty \frac{2\sqrt{2}}{k} |Q(t)| dt \right), \end{aligned}$$

ce qui montre que, pour  $k \geq C\omega^2$  (où  $C$  ne dépend que de  $Q$ ),  $|F(k)| \geq \frac{1}{2}$ . Il en résulte que

$$\int_{C\omega^2}^\infty \frac{k}{|F(k)| |k - i\xi_j| |k + i\xi_j|^2} dk \leq 2 \int_{C\omega^2}^\infty \frac{1}{k^2} dk = \frac{2}{C\omega^2}.$$

Et pour minorer  $\frac{1}{|F(k)|}$  sur  $]0, C\omega^2]$ , on utilise le wronskien de  $f(k, \cdot)$  et  $f(-k, \cdot)$ , qui est constant et qui vaut  $-2ik$  (on le calcule en prenant  $\lim_{x \rightarrow \infty}$ , sachant que  $f'(k, x) \sim ike^{ikx}$ ). Il vaut par ailleurs, pour tout  $k > 0$ ,

$$f(k, 0)f'(-k, 0) - f(-k, 0)f'(k, 0) = 2i\Im m \left( F(k) \overline{f'(-k, 0)} \right).$$

A l'aide de l'équation intégrale vérifiée par  $f(k, \cdot)$ ,

$$f(k, x) = e^{ikx} + \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{k} V(t) f(k, t) dt,$$

on en déduit,  $\forall k, 0 < k \leq C\omega^2$ ,

$$\begin{aligned} |f'(k, 0)| &\leq k + \int_0^\infty |\cos kt| |V(t)| |f(k, t)| dt \\ &\leq C\omega^2 + \omega^2 \exp(a\omega^2) \int_0^\infty |Q(t)| dt \\ &\leq C' \exp(a'\omega^2), \end{aligned}$$

ainsi que pour  $f'(-k, 0) = \overline{f'(k, 0)}$ . On a alors

$$2k \leq 2|F(k)| C' \exp(a'\omega^2),$$



ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^{C\omega^2} \frac{k}{|F(k)| |k - i\xi_j| |k + i\xi_j|^2} dk &\leq C' \exp(a'\omega^2) \int_0^{C\omega^2} \frac{1}{\xi_j^3} dk \\ &\leq C' \exp(a'\omega^2) (b\omega)^3 C\omega^2 \\ &\leq C'' \exp(a''\omega^2), \end{aligned}$$

et aboutit finalement à

$$\frac{1}{|\tilde{F}(i\xi_j)|} \leq \frac{4\omega}{\pi} \left( C'' \exp(a''\omega^2) + \frac{2}{C\omega^2} \right),$$

ce qui termine la preuve. ✓

Avant de traiter le théorème de cette partie, on considère deux exemples où on peut donner des estimations explicites.

**Exemple 1.** — Soit

$$Q_1(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Alors  $Q_1$  est paire, et vérifie les conditions de la proposition 3. En appliquant la méthode WKB, on a (pour  $\omega \geq 1$ ) :

$$N(\omega) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] = [\omega].$$

On trouve  $x_+(\eta) = -x_-(\eta) = \sqrt{\frac{1}{\eta} - 1}$ , et

$$\frac{\pi^2}{256} \frac{1}{\omega^2} \leq \eta_N \leq \frac{\pi^2}{16} \frac{1}{\omega^2},$$

soit,  $\forall n, 1 \leq n \leq N$ ,

$$\frac{\pi^2}{256} \frac{1}{\omega} \leq \xi_n \leq \omega.$$

Pour l'écart des valeurs propres, on trouve

$$\xi_n - \xi_{n-1} \geq \frac{1}{5\omega}.$$

On a finalement,  $\forall n, 1 \leq n \leq N$ ,

$$1 \leq s_n \leq \exp\left(\frac{4}{\pi}\omega^2 + \frac{\pi}{2}\omega\right),$$

et

$$\frac{1}{\exp(2\omega \ln 4\omega)} \leq \prod_{j \neq n} \left( \frac{\xi_n - \xi_j}{\xi_n + \xi_j} \right)^2 \leq 1,$$

puis

$$|\dot{F}(i\xi_j)| \leq \frac{512}{\pi^2} \omega \exp\left(\pi\sqrt{2}\omega^2\right),$$

et

$$\frac{1}{\left| \widetilde{F}(i\xi_j) \right|} \leq 2^{22} \omega^7 \exp \left( \pi \sqrt{2} \omega^2 \right),$$

donc

$$\frac{1}{45 \omega^9 \exp(26 \omega^2)} \leq \frac{4\xi_n^2}{C_n} \leq 22 \omega^2 \exp(15 \omega^2).$$

**Exemple 2.** — Soit

$$Q_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Le potentiel associé s'avère être un cas limite vu sa discontinuité en  $x = 1$ . L'exemple se traite ici directement.

L'équation  $-y'' - \omega^2 y = \lambda y$ ,  $\lambda = -\xi^2$ ,  $0 < \xi < \omega$ , admet pour fonctions propres les

$$y_\xi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\xi}{1+\xi}} \sin \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} x \right), & \text{si } x \in [0, 1], \\ \sqrt{\frac{2\xi}{1+\xi}} e^\xi \sin \sqrt{\omega^2 - \xi^2} e^{-\xi x}, & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

où  $\xi$  satisfait l'équation

$$\xi \sin \sqrt{\omega^2 - \xi^2} + \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \cos \sqrt{\omega^2 - \xi^2} = 0. \quad (\diamond)$$

Dans ce cas, les  $y_\xi \in C^1(\mathbb{R}^+)$ , vérifient les conditions aux bords en 0 et  $+\infty$ , et sont normées :

$$\int_0^{+\infty} y_\xi^2(x) dx = 1.$$

On sait d'abord que  $\xi = O(\omega)$ . Et puisque

$$C_\xi = (y'_\xi(0))^2 = \frac{2\xi}{1+\xi} (\omega^2 - \xi^2),$$

alors

$$\frac{4\xi^2}{C_\xi} = \frac{2\xi(\xi+1)}{\omega^2 - \xi^2}.$$

Pour la première estimation, on a même  $0 < \frac{4\xi^2}{C_\xi} \leq 220 \omega^2$  : en effet, si  $\omega \geq 10$ ,  $\varepsilon = \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \leq \frac{1}{10}$ , l'équation  $(\diamond)$  devient

$$\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} \sin \varepsilon + \varepsilon \cos \varepsilon \geq 10 \varepsilon > 0,$$

ce qui impose  $\varepsilon \geq \frac{1}{10}$ , soit

$$\xi \leq \sqrt{\frac{99}{100}} \omega.$$

En revanche, la minoration de  $\frac{4\xi^2}{C_\xi}$  nécessite une minoration de  $\xi$  du même type, qui est fautive en général, car la première valeur propre  $\xi_1$  ne peut pas être minorée par  $\frac{1}{\omega^k}$  ou  $\exp(-a\omega^b)$ , ce qui est nécessaire pour avoir  $\ln \frac{4\xi^2}{C_\xi} = O(\omega^b)$ .

En effet, fixons par exemple  $\omega_0$  très grand,  $\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ , et considérons l'équation  $(\diamond)$  en  $(\xi, \omega)$ , qui est donnée par une fonction  $g$  suffisamment régulière au voisinage de  $(0, \omega_0)$ . Puisque  $\frac{\partial g}{\partial \xi}(0, \omega_0) = \sin \omega_0 = 1$ , et  $\frac{\partial g}{\partial \omega}(0, \omega_0) = -\omega_0$ , une application immédiate du théorème des fonctions implicites permet de considérer la fonction  $\xi(\omega)$ , qui admet au voisinage de  $\omega_0$  le développement

$$\xi(\omega) = \omega_0(\omega - \omega_0) + O((\omega - \omega_0)^2).$$

On voit alors que,  $\forall \omega$ ,  $0 < \omega - \omega_0 \leq \eta(\omega_0)$ ,  $\eta(\omega_0)$  assez petit, on a

$$0 < \xi(\omega) \leq 2 \exp\left(-\frac{1}{2} \exp \omega\right),$$

ce qui montre, pour tout  $\omega$  arbitrairement grand, l'impossibilité de minorer  $\xi$  comme voulu. Ce problème provient du fait que  $Q_2$  n'est même pas continue en  $x = 1$ .

Par contre, si on impose une restriction sur  $\omega \geq 10$  du type

$$\left| \omega - \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \right| \geq \frac{1}{5},$$

on voit que, pour tout  $\xi$ ,  $0 < \xi \leq \frac{1}{10}$ , on a  $\left| \sqrt{\omega^2 - \xi^2} - \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \right| \geq \frac{1}{10}$ , et

$$\left| \xi \sin \sqrt{\omega^2 - \xi^2} + \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \cos \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on doit avoir  $\xi \geq \frac{1}{10}$ , ce qui donne

$$\frac{4\xi^2}{C_\xi} \geq \frac{1}{5\omega^2},$$

et aboutit à un encadrement même plus fin de  $\frac{4\xi^2}{C_\xi}$  en  $O(\omega^2)$ .

**5.3. Applications au problème inverse.** — On peut finalement énoncer les conséquences des résultats négatifs établis dans la partie 3 et des résultats positifs énoncés précédemment.

**Théorème 4.** — Soit  $\mathcal{Q}$  la classe des fonctions  $Q$  définies sur  $\mathbb{R}^+$ , qui sont strictement positives, strictement décroissantes avec décroissance polynomiale à l'infini, et qui ont 2 dérivées localement intégrables tendant polynomialement vers 0, avec  $Q'(0) = 0$ , et soit  $\Lambda_{\mathcal{Q}}$  un compact de  $\mathcal{Q}$ , du type  $\Lambda_l$ . Considérons, pour tout  $\omega$  assez grand, la classe des opérateurs de Sturm-Liouville  $-\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 Q$ , où  $Q \in \Lambda_{\mathcal{Q}}$ .

Donnons-nous également, pour tous  $N$ ,  $a_1\omega \leq N \leq a_2\omega$ , et  $b(\omega) > 0$ ,  $\frac{1}{b(\omega)}$  polynomiaux en  $\omega$ , une fonction  $\psi(x, \zeta)$  définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^N$ , de classe  $C^1$  par rapport à  $x$  et vérifiant les conditions du corollaire 2 sur tout  $[0, X]$ . Alors l'approximation de

$$\int_0^x \Lambda_{\mathcal{Q}} := \left\{ \left( x \mapsto \int_0^x Q(t) dt \right), Q \in \Lambda_{\mathcal{Q}} \right\},$$

au sens uniforme sur tout intervalle  $[0, X]$ ,  $X \geq 1$ , par la famille

$$\left\{ \left( x \mapsto \frac{1}{b(\omega)} \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x, \zeta) \right), \zeta_j = O(\omega^r), \forall j = 1, \dots, N \right\},$$

lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ , ne peut pas être meilleure que de l'ordre de

$$\frac{1}{(\omega \ln \omega)^3}.$$

On dispose d'autre part d'une formule d'approximation telle que, si  $N(\omega)$  est le nombre de valeurs propres  $\xi_j$  et caractéristiques  $C_j$  de l'opérateur  $-\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 Q$ , et

$$\Psi(x, \zeta) = \det \widetilde{W}_{s,r}(x, \zeta),$$

avec

$$\widetilde{W}_{s,r}(x, \zeta) = \frac{2sh(\zeta_r + \zeta_s)x}{\zeta_r + \zeta_s} - (1 - \delta_{s,r}) \frac{2sh(\zeta_s - \zeta_r)x}{\zeta_s - \zeta_r} - \delta_{s,r}(2x - \exp(\zeta_{r+N})),$$

$s, r = 1, \dots, N(\omega)$ , alors la famille  $\left\{ \frac{2}{\omega^2} \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\}$  approche le compact  $\int_0^1 \Lambda_Q$  au moins à l'ordre  $\frac{\ln \omega}{\sqrt{\omega}}$ .

En outre, si  $Q$  est donnée, un élément  $\zeta(Q)$  optimisant peut être ainsi choisi :

$$\zeta_j(Q) = \xi_j, \text{ et } \zeta_{j+N}(Q) = \ln \frac{4\xi_j^2}{C_j}, \quad j = 1, \dots, N(\omega).$$

Avant de prouver ce théorème, on tient à en préciser l'interprétation en terme de problème inverse : il n'existe pas de formule qui puisse donner analytiquement une approximation meilleure que de l'ordre de  $\frac{1}{(\omega \ln \omega)^3}$ , de tout potentiel (avec deux dérivées) à partir de ses valeurs propres et valeurs caractéristiques. Ainsi, la formule d'approximation (explicitée) de Gelfand-Levitan-Jost-Kohn donne un résultat positif avec une vitesse au minimum de l'ordre de  $\frac{\ln \omega}{\sqrt{\omega}}$ , ce qui remplit notre objectif pour le cas de 2 dérivées et répond à la question posée dans [5] p. 22, sur le problème d'approximation de  $C^{m+1}$  par une famille à  $\omega$  paramètres.

Il est d'autre part intéressant de constater que le choix de cette fonction optimisante n'a pas été construite spécialement dans le cadre de la théorie d'approximation, puisqu'elle provient de la théorie physique mathématique.

*Démonstration.* — Il est d'abord à noter que la restriction sur  $[0, 1]$  d'une telle fonction  $Q$  est bien dans  $\Lambda_2([0, 1])$  (du moins dans un homothétique), et qu'inversement si on se donne  $h \in \Lambda_2 \cap C^2([0, 1])$ ,  $h$  positif, strictement décroissant avec  $h'(0) = 0$ , on peut le prolonger sur  $\mathbb{R}^+$  en une fonction  $Q_h$  (soit un potentiel  $-\omega^2 Q_h$ ) de classe  $C^2$ , positive avec décroissance polynomiale (ainsi que ses deux dérivées).

Cela permet, étant donnés  $\psi$  et le compact  $\Lambda_Q$ , d'appliquer le corollaire 3 (avec  $m = 2$ ),  $N$  et  $\omega$  ayant le même ordre de grandeur. Il existe donc un potentiel  $-\omega^2 Q_h$ ,  $Q_h > 0$ , tel que  $\int_0^1 Q_h$  soit distant de  $\left\{ \frac{1}{b(\omega)} \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}(\cdot, \zeta) \right\}$  sur  $[0, 1]$  d'au moins  $\frac{C}{(2N \ln(2N))^3}$ , pour tout  $\zeta$  de taille polynomiale en  $\omega$ , soit de l'ordre de  $\frac{1}{(\omega \ln \omega)^3}$  sur tout  $[0, X]$ .

Quant à la fonction  $\Psi$  ainsi définie, elle vérifie bien les conditions du corollaire 1. En effet, c'est d'abord une fonction à  $2N(\omega)$  paramètres ( $N(\omega)$  et  $\omega$  ayant le même ordre de grandeur), entière de type exponentiel :

c'est le cas pour

$$\left\| \frac{sh(\zeta_s \pm \zeta_r)x}{\zeta_s \pm \zeta_r} \right\|_\infty \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} |\zeta_s \pm \zeta_r|^{2n} X^{2n+1} \leq X \exp[(|\zeta_r| + |\zeta_s|)X],$$

donc

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{W}_{s,r} \right\|_\infty &\leq 4X \exp[(|\zeta_r| + |\zeta_s|)X] + 2X + \exp(|\zeta_{s+N}| + |\zeta_{r+N}|), \\ &\leq 7X \exp[(|\zeta_r| + |\zeta_{r+N}| + |\zeta_s| + |\zeta_{s+N}|)X], \end{aligned}$$

ainsi que pour chaque produit du déterminant :

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{j=1}^N \widetilde{W}_{j,\tau(j)} \right\|_\infty &\leq (7X)^N \exp \left[ \sum_{j=1}^N (|\zeta_j| + |\zeta_{j+N}|)X + \sum_{j=1}^N (|\zeta_{\tau(j)}| + |\zeta_{\tau(j)+N}|)X \right] \\ &= (7X)^N \exp(2X \|\zeta\|_1). \end{aligned}$$

Comme ils sont au nombre de  $N! = O(e^{N^2})$ , on obtient une estimation de  $\Psi$  en  $O(e^{2N^2} e^{4X \|\zeta\|_1})$ .

Pour les estimations de  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ , il suffit de remarquer que  $\Psi$  est également entière (et même de type exponentiel) par rapport à la variable  $x$ , comme on le voit pour chaque  $\widetilde{W}_{s,r}$  (et donc pour le déterminant). La formule de Cauchy appliquée sur le disque  $D(0, X+1)$  et l'estimation précédente nous donnent des majorations analogues pour  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  sur  $[0, X]$ ,  $\forall \zeta \in \mathbb{C}^{2N}$ .

Ensuite,

$$\det \left( \widetilde{W}_{s,r} \right) (0)^{-1} = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^N \exp(-\zeta_{N+j}) \leq \exp(\|\zeta\|_1) = O(e^{\alpha \omega^\beta}).$$

Enfin, le choix des évaluations

$$\zeta_j(Q) = \xi_j(-\omega^2 Q), \text{ et } \zeta_{j+N}(Q) = \ln \frac{4\xi_j^2}{C_j}(-\omega^2 Q), \quad j = 1, \dots, N,$$

est possible, car chaque  $Q \in \mathcal{Q}$  vérifiant les conditions de la proposition 3, on a  $\xi_j(-\omega^2 Q) = O(\omega)$ , et

$$\frac{1}{\alpha \exp(\beta \omega^\gamma)} \leq \frac{4\xi_j^2}{C_j}(-\omega^2 Q) \leq \alpha \exp(\beta \omega^\gamma),$$

donc  $\ln \frac{4\xi_j^2}{C_j}(-\omega^2 Q) = O(\omega^\gamma)$ .

Et ce choix de  $\zeta(Q)$  donne l'approximation voulue de  $\int_0^1 Q$  sur tout  $[0, X]$  à l'ordre de  $\frac{\ln \omega}{\sqrt{\omega}}$  : cela provient en effet du théorème 2 donné dans [5] p. 22, qui nous dit que,

uniformément sur tout  $[0, X]$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x Q(y) dy - \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\Psi(x)} \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, \zeta(Q)) \right| &= \left| \int_0^x Q(y) dy - \frac{2}{\omega^2} \int_0^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln |\Psi(y, \zeta(Q))| dy \right| \\ &= \left| \int_0^x Q(y) dy - 2 \int_0^x Q_\omega^0(y) dy \right| \\ &= O\left(\frac{\ln \omega}{\sqrt{\omega}}\right). \end{aligned}$$

Les conditions de régularité pour  $Q$  sont vérifiées :  $Q$  est strictement positif (même minoré par une borne ne dépendant que du compact  $\Lambda_Q$ ) et dans (un homothétique de)  $\Lambda_2$ , hypothèse qui peut remplacer celle du nombre fini d'intervalles de monotonie de ses dérivées.

✓

**Remarque 4.** — La fonction  $\Psi$  vérifie également,  $\forall \zeta \in \mathbb{C}^N$ ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \det \widetilde{W}_{s,r} \right) (0, \zeta) = 0.$$

En effet,  $\forall r, s = 1, \dots, N$

$$\frac{\partial \widetilde{W}_{s,r}}{\partial x}(x, \zeta) = 2ch(\zeta_r + \zeta_s)x - (1 - \delta_{s,r})2ch(\zeta_s - \zeta_r)x - 2\delta_{s,r},$$

donc

$$\frac{\partial \widetilde{W}_{s,r}}{\partial x}(0, \zeta) = 2 - 2(1 - \delta_{s,r}) - 2\delta_{s,r} = 0.$$

C'est une hypothèse inutile pour ce théorème, mais qui peut nous servir si on veut utiliser  $\Psi$  dans le cadre du corollaire 1.

Si on considère maintenant le cas plus général d'un potentiel  $-\omega^2 Q$  avec  $m + 1$  dérivées localement intégrables et qui s'annulent en 0, on est au moins capable d'expliciter une mesure spectrale voisine de celle de l'opérateur  $-\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 Q$ , qui est

$$\sigma_\omega(d\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{\tau + \omega^2 Q(0)}, & \tau \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{N(\omega)} C_j \delta(\tau + \xi_j^2), & \tau < 0. \end{cases}$$

Posons alors, pour  $0 \leq y \leq x \leq X$ ,

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(x\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}} \frac{\sin(y\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}} \frac{\omega^2 Q(0) d\tau}{\sqrt{\tau + \omega^2 Q(0)} + \sqrt{\tau}},$$

(intégrale absolument convergente pour tous  $x, y$ ) et considérons le noyau  $K(x, y)$  solution de l'équation intégrale

$$K(x, y) + \int_0^x K(x, s) \Phi(s, y) ds + \Phi(x, y) \equiv 0.$$

Construisons alors le potentiel  $q_\omega$  de la façon suivante :

$$q_\omega(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln |\det T(x)|,$$

où  $T(x)$  est la matrice d'ordre  $N(\omega)$  définie par (cf [10])

$$T_{j,k}(x) = \frac{4\xi_j^2}{C_j} \delta_{j,k} + 4 \int_0^x \left( sh(\xi_j t) + \int_0^t K(t,s) sh(\xi_j s) ds \right) \left( sh(\xi_k t) + \int_0^t K(t,s) sh(\xi_k s) ds \right) dt.$$

Alors ([5], théorème 1 p. 21) la fonction  $Q_\omega = -\frac{q_\omega}{\omega^2}$  réalise, uniformément sur tout compact  $[0, X]$ , une approximation de  $Q$  (au moins) à l'ordre  $\frac{1}{\omega^m}$ .

Comme on le voit,  $Q_\omega$  s'écrit comme une fonction analytique  $\tilde{Q}_\omega$  en les variables  $\zeta, w$ , où  $\zeta \in \mathbb{C}^{2N}$ ,  $\Re w > 0$  ( $w$  remplace la variable  $\omega^2 Q(0)$ ), soit

$$\tilde{Q}_\omega(x, \zeta, w) = \frac{2}{\omega^2} \left( -\frac{\partial \tilde{K}}{\partial x}(x, x, w) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln |\det \tilde{T}(x, \zeta, w)| \right),$$

où  $\tilde{K}$  est la solution, pour tous  $0 \leq y \leq x \leq X$ ,  $\Re w > 0$ , de l'équation

$$\tilde{K}(x, y, w) + \int_0^x \tilde{K}(x, s, w) \tilde{\Phi}(s, y, w) ds + \tilde{\Phi}(x, y, w) \equiv 0,$$

avec

$$\tilde{\Phi}(x, y, w) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(x\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}} \frac{\sin(y\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}} \frac{w d\tau}{\sqrt{\tau+w} + \sqrt{\tau}},$$

( $\tilde{\Phi}$  est bien définie puisque  $\Re w > 0$ ) et

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{j,k}(x, w, \zeta) &= \exp(\zeta_{N+j}) \delta_{j,k} + \\ &+ 4 \int_0^x \left( sh(\zeta_j t) + \int_0^t \tilde{K}(t, s, w) sh(\zeta_j s) ds \right) \left( sh(\zeta_k t) + \int_0^t \tilde{K}(t, s, w) sh(\zeta_k s) ds \right) dt. \end{aligned}$$

Nous espérons avoir prouvé que les fonctions  $\frac{\partial \tilde{K}}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \tilde{K}}{\partial y}$  soient holomorphes de type exponentiel par rapport à  $w \in \{\Re z > 0\}$ , et de restriction sur  $\mathbb{R}^+$  de type polynomial. On pourrait en déduire un résultat de presque optimalité analogue au théorème 4, qui se déduirait des corollaires 1 et 3 : si  $\mathcal{Q}$  est la classe des fonctions  $Q$  définies sur  $\mathbb{R}^+$ , strictement positives, à décroissance polynomiale, avec  $m+1$  dérivées localement intégrables qui s'annulent en 0, et  $\psi(x, \zeta, w)$  une fonction définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^N \times \{\Re w > 0\}$ , continue par rapport à  $x$  et vérifiant les conditions du corollaire 1, alors l'approximation de tout  $\Lambda_{\mathcal{Q}}$  sur tout  $[0, X]$ , par la famille

$$\left\{ \left( x \mapsto \frac{1}{b(\omega)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x, \zeta, w) \right), \zeta_j = O(\omega^r), |w - a(\omega)| \leq \frac{a(\omega)}{2} \right\},$$

où  $b(\omega) > 0$ ,  $\frac{1}{b(\omega)}$  et  $a(\omega) \geq 1$  sont polynomiaux en  $\omega$ , ne peut pas être meilleure que de l'ordre de

$$\frac{1}{(\omega \ln \omega)^{m+1}}.$$

En outre, la fonction définie précédemment

$$\tilde{\Psi}(x, \zeta, w) = \exp \left( - \int_0^x \tilde{K}(t, t, w) dt \right) \det \tilde{T}(x, \zeta, w),$$

$j, k = 1, \dots, N(\omega)$ , réaliserait un cas d'approximation presque optimale à l'ordre  $\frac{1}{\omega^m}$ , avec comme choix optimisant l'élément

$$\zeta_j(Q) = \xi_j, \quad \zeta_{j+N}(Q) = \ln \frac{4\xi_j^2}{C_j}, \quad j = 1, \dots, N(\omega),$$

et

$$w(Q) = a(\omega) = \omega^2 Q(0).$$

**Remarque 5.** — Lorsque  $Q$  s'annule en 0 avec dérivées, la mesure spectrale devient

$$\sigma_\omega^0(d\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{\tau}, & \tau \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{N(\omega)} C_j \delta(\tau + \xi_j^2), & \tau < 0, \end{cases}$$

qui redonne la formule d'approximation de type Gelfand-Levitan  $Q_\omega^0$ , qui est complètement explicitée. Le seul problème est qu'on ne sait pas si la vitesse d'approximation est toujours de l'ordre de  $\frac{1}{\omega^m}$ , car pour utiliser le théorème 1 dans [5], il faut que la fonction  $Q$  soit strictement positive sur  $\mathbb{R}^+$  (en particulier en 0). On est cependant assez optimiste, car en pratique, mêmes pour des potentiels pas très régulier, on utilise  $Q_\omega^0$ , qui approxime  $Q$  avec une bonne vitesse : les exemples d'applications numériques, même s'ils ne sont pas des preuves, donnent malgré tout un bon pronostic (cf [5], partie 4).

**5.4. D'autres applications aux problèmes inverses.** — On formule quelques exemples de problèmes inverses où nous espérons pouvoir appliquer nos résultats.

**Exemple 1.** — Le théorème 1.2 p. 260 dans [9] nous donne un résultat original dans le cadre d'approximation au sens  $L^2$  : si  $u$  est un potentiel négatif de classe  $C^1$ , alors  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\cdot, \varepsilon) = u$ , où

$$u(x, \varepsilon) = -2\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det(I + G(x, \varepsilon)),$$

avec

$$G(x, \varepsilon) = \varepsilon \left( \frac{\exp\left(-\frac{\eta_j + \eta_k}{\varepsilon} x\right)}{\eta_j + \eta_k} C_j C_k \right),$$

$1 \leq j, k \leq N(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$ . Ici aussi on a affaire à une fonction analytique en les valeurs propres  $\eta_j$  et  $\ln C_j$ , de type exponentiel. Plus précisément, elle s'écrit

$$\tilde{G}(x, \zeta, w) = \varepsilon \frac{\exp(w_j + w_k)x}{w_j + w_k} \exp(\zeta_j + \zeta_k),$$

où on choisira  $w_j = \frac{\eta_j}{\varepsilon^r}$  et  $\zeta_k = \ln C_k$ ,  $j = 1, \dots, N(\varepsilon)$ , et  $r$  assez grand pour minorer  $\frac{\eta_j}{\varepsilon^r}$  par une constante positive. On espère en déduire un résultat analogue au théorème 4, avec résultats négatif et positif. Cependant, il faudrait appliquer un résultat du type corollaire 1 en se passant de l'hypothèse que  $\frac{d}{dx} \det(I + G)(0, \varepsilon) = 0$ .



**Exemple 2.** — On a dans le même esprit un résultat d'approximation de V. A. Marchenko (cf. [12]) qui nous dit que, pour un potentiel  $q$  qui a  $m + 1$  dérivées sur  $\mathbb{R}^+$ , la connaissance de la fonction de Weyl  $j(k)$  sur l'intervalle  $[-A, A]$  permet de reconstruire  $q$  avec une vitesse (au moins) de l'ordre de  $\frac{1}{A^m}$ . On peut ici aussi prévoir un résultat négatif qui donnerait une minoration de l'ordre de  $\frac{1}{(A \ln A)^{m+1}}$  pour l'approximation de  $q$ , malgré la difficulté provenant du passage du discret au continu pour la connaissance de  $j(k)$ .

**Exemple 3.** — Si on s'intéresse cette fois à des espaces fonctionnels à plusieurs variables (et plus seulement  $\mathbb{R}^+$ ), on peut considérer un théorème de R. Novikov (cf [13]), qui est un résultat d'approximation, dans le cas  $n=3$ , de fonctions avec  $l$  dérivées intégrables, à partir de la connaissance de l'amplitude de diffusion à une énergie  $E$  donnée. On a ici une vitesse de l'ordre de

$$O\left(\frac{1}{E^{\frac{l-3-\varepsilon}{2}}}\right),$$

au sens uniforme quand  $E \rightarrow +\infty$  ( $\varepsilon$  arbitrairement petit), soit un comportement voisin de  $\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)^{l-3}$ ,  $\sqrt{E}$  étant homogène au paramètre  $\omega$ . On peut de même prévoir un résultat négatif qui montrerait une impossibilité d'approximer tout potentiel, mieux qu'à l'ordre  $\left(\frac{1}{\sqrt{E} \ln E}\right)^l$ .

## 6. Autres méthodes

Pour terminer, avec le théorème 1, on a montré une impossibilité de bien approximer analytiquement des compacts d'espaces fonctionnels. Comme on l'a vu, ce résultat utilise le théorème de Vitushkin pour le cas polynomial, et le fait qu'une fonction entière de type exponentiel est très bien approchée par des polynômes. Le problème est que tout doit converger : ainsi, en plus des paramètres qui définissent la classe de telles fonctions, il faut borner les variables ; ce qui a pour conséquence, dans le cadre du problème inverse, la nécessité d'estimer les valeurs propres et valeurs caractéristiques d'un opérateur de Sturm-Liouville.

Comme on l'a signalé dans l'introduction on pouvait s'inspirer de la méthode de Warren en essayant d'estimer le nombre de composantes connexes de l'ensemble des zéros d'une fonction analytique. De même que l'estimation de Warren donnée dans [20] remontait au théorème de Bézout, il s'agirait ici d'établir des estimations du nombre de solutions non dégénérées d'un système de fonctions analytiques. On aboutirait ainsi à des résultats négatifs analogues, mais cette fois-ci sans avoir à borner les variables.

En s'inspirant de la formule de type Gelfand-Levitan, on pouvait déjà s'interroger sur une classe relativement simple de fonctions analytiques qui est celle des pseudo-polynômes, sous-classe des fonctions entières de type exponentiel, et définis ainsi,

$$P(\zeta_1, \dots, \zeta_n, \exp < a_1, \zeta >, \dots, \exp < a_k, \zeta >),$$

où  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ ,  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle a_j, \zeta \rangle = a_j^1 \zeta_1 + \dots + a_j^n \zeta_n$ . Il existe effectivement des estimations explicites données par A. G. Khovanskii dans [7], dont on peut déduire par exemple le résultat suivant, signalé dans l'introduction :

**Théorème 5.** — *Soit, pour  $n, d \geq 2$ ,  $k \geq 1$ ,*

$$P_{n,k,d} = \left\{ \sum_{|j| \leq d} c_j \zeta_1^{j_1} \dots \zeta_n^{j_n} e^{j_{n+1} \langle a_1, \zeta \rangle} \dots e^{j_{n+k} \langle a_k, \zeta \rangle}, \zeta \in \mathbb{R}^n \right\},$$

*une famille d'éléments de  $C(I^s)$  paramétrée par un quasi-polynôme à coefficients  $c_j \in C(I^s)$ , à  $n$  variables  $\zeta_i$ ,  $k$  pseudo-variables  $e^{\langle a_i, \zeta \rangle}$  et de degré total  $d$ .*

*Alors on a :  $\exists h \in \Lambda_{l,s}$ ,  $\forall \zeta \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\|h - P_{n,k,d}\|_\infty \geq \frac{C(l,s)}{(k^2 n \log n \log d)^{\frac{1}{s}}}.$$

*Ce façon équivalente, si  $\mathcal{P}_{n,k,d}$  désigne l'ensemble des familles paramétrées par des quasi-polynômes à  $n$  variables,  $k$  pseudo-variables et de degré total  $d$ , on a*

$$D_{n,k,d}(\Lambda_{l,s}) := \inf_{P \in \mathcal{P}_{n,k,d}} \sup_{h \in \Lambda_{l,s}} \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|h - P(\zeta)\|_\infty \geq \frac{C(l,s)}{(k^2 n \log n \log d)^{\frac{1}{s}}}.$$

*En outre, la constante  $C(l,s)$  peut être calculée et vaut*

$$\frac{1}{\sqrt{s} 2^{l+1} 38^{\frac{l}{s}} ([l] + 1)^{[l]+1} (4(1+e))^s ([l]+1)}.$$

**Remarque 6.** — Comme pour le cas polynomial, le résultat est aussi valable si on considère l'espace  $L^1(I^s)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^1}$ , avec les familles quasi-polynomiales à coefficients  $c_j \in L^1(I^s)$  (avec une autre constante  $C_{L^1}(l,s)$ ).

D'autre part, l'énoncé reste valable pour  $n = 1$  ou  $d = 1$  quitte à remplacer  $n$  et  $d$  par  $n + 1$  et  $d + 1$ .

*Démonstration.* — La preuve est du même esprit que pour le théorème 3 : il s'agit d'estimer de façon analogue le nombre de composantes connexes de l'ensemble des zéros d'un quasi-polynôme en fonction de  $n, k, d$ . Le nombre de cellules d'un tel ensemble vaut au plus, à partir de [7] (pour  $p = 1$ ),

$$2^{\frac{k(k-1)}{2}} d(n+d)^{n-1} (n(n+d) - n+1)^k \leq 2^{\frac{k(k-1)}{2}} d^{n+k} n^{n+2k}.$$

En reprenant la même méthode que Warren dans [20], on obtient une estimation du nombre de composantes de l'ensemble  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^m \{\zeta, P_j(\zeta) = 0\}$ , qui est

$$\sum_{j=0}^n 2^{\frac{k(k-1)}{2}} (2d)^{n+k} n^{n+2k} 2^j C_m^j < 2^{\frac{k(k-1)}{2}} (4emdn)^{n+2k},$$

où  $d = \max d_j$ .

Pour  $m \geq 38k^2n \log n \log d$ , ce nombre est inférieur à  $2^m$ , ce qui donne, si  $r$  est le plus petit entier  $\geq 2$  tel que  $r^s \geq 38k^2n \log n \log d$  :  $\exists h \in \Lambda_{l,s}$ ,  $\forall \zeta \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \|h - P_{n,k,d}(\zeta)\|_\infty &\geq \frac{1}{2M_{l,s}4^{s([l]+1)}r^l} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{s}2^{l+1}38^{\frac{l}{s}}([l]+1)^{[l]+1}(4(1+e))^{s([l]+1)}} \frac{1}{(k^2n \log n \log d)^{\frac{l}{s}}}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ✓

Ce résultat présente cependant deux inconvénients : d'abord comme on l'a déjà dit dans l'introduction, la minoration est relativement faible par rapport à  $k$  ; ensuite, c'est une classe trop restreinte car, dans le cadre de la théorie d'approximation, on ne pourra considérer que des familles du type

$$\sum_{j=(j_1, \dots, j_{n+k})} c_j(x) \zeta_1^{j_1} \dots \zeta_n^{j_n} (\exp(\langle a_1, \zeta \rangle))^{j_{n+1}} \dots (\exp(\langle a_k, \zeta \rangle))^{j_{n+k}},$$

où  $c_j \in C(I^s)$  (ou  $L^1(I^s)$ ). En particulier, il n'y a pas moyen de l'appliquer aux fonctions du genre  $\exp(\langle \zeta, x \rangle)$  où les variables  $x \in I^s$  et  $\zeta \in \mathbb{R}^n$  sont "mélangées" (comme celles qui interviennent dans les formules du type Gelfand-Levitan).

On pouvait dans le même esprit avoir recours à la conjecture de Kouchnirenko, qui est une généralisation à plusieurs variables du théorème de Descartes, et qui dit qu'un système  $P_1 = \dots = P_n = 0$  d'équations polynomiales à  $n$  variable, où  $m_i$  est le nombre de termes de  $P_i$ , ne peut avoir plus de  $(m_1 - 1) \dots (m_n - 1)$  racines positives non dégénérées. Elle aurait pu nous être utile, mais elle a été récemment infirmée par B. Haas qui nous donne un contre-exemple dans [4].

Dans notre cas où on s'intéresse aux fonctions du type  $\exp(\langle \zeta, x \rangle)$ , on montre le résultat suivant, qui est une application du théorème de Descartes :

**Proposition 4.** — *On considère la famille  $\Psi \subset C(I)$  définie par*

$$\left\{ \left( t \in [0, 1] \mapsto \psi(t, \zeta) = \sum_{j=1}^n P_j(t) \exp(\zeta_j t) \right), \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

où  $P_j$  est un polynôme en  $t$  de degré  $\leq p_j$ .

On considère également la fonction définie sur  $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^n \left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$ , par

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon_i \frac{g_l(nx - i + 1)}{M_l n^l}, \quad x \in \left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right],$$

où  $\varepsilon_i = 1$ , si  $i$  pair,  $-1$  sinon ( $g_l$  définie comme dans la partie 4).

On a alors

$$\inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|f_\varepsilon - \psi(\cdot, \zeta)\|_\infty \geq \frac{C_l}{\left( n + \sum_{j=1}^n p_j \right)^l}.$$

*Démonstration.* — Supposons d'abord les  $\zeta_j \in \mathbb{N}$  et les  $P_j = c_j$  constants. Par le théorème de Descartes, le polynôme  $\sum_{j=1}^n c_j X^{\zeta_j}$  a au plus  $n - 1$  racines  $> 0$ . Si  $\zeta \in \mathbb{Z}^n$ , on factorise par  $X^{-k}$ ,  $k$  assez grand. Enfin pour  $\zeta \in \mathbb{Q}^n$ , on pose  $X = \exp \frac{t}{p}$ ,  $p$  dénominateur commun des  $\zeta_j$ , ce qui montre que la fonction

$$t \in \mathbb{Q}^n \mapsto \sum_{j=1}^n c_j \exp(\zeta_j t),$$

a au plus  $n - 1$  zéros dans  $\mathbb{R}$ .

Or  $f_\varepsilon$  s'annulant au moins une fois de plus que  $\psi(\cdot, \zeta)$ , il existe au moins un sous-intervalle où  $f_\varepsilon$  et  $\psi(\cdot, \zeta)$  sont de signes contraires, ce qui implique,  $\forall \zeta \in \mathbb{Q}^n$ ,

$$\|f_\varepsilon - \psi(\cdot, \zeta)\|_\infty \geq \frac{C_l}{n^l}.$$

Enfin, l'assertion est encore valable pour  $\zeta \in \mathbb{R}^n$  par densité, la convergence étant uniforme sur  $[0, 1]$  (c'est encore une application de l'idée simple mais fondamentale, qui dit qu'une fonction qui ne s'annule pas beaucoup ne peut pas beaucoup osciller autour de 0).

Considérons maintenant le cas général

$$\psi(t, \zeta) = \sum_{j=1}^n P_j(t) \exp(\zeta_j t),$$

où  $P_j$  est un polynôme de degré  $\leq p_j$ . On commence par remarquer que la fonction  $t$  est limite uniforme sur  $[0, 1]$  de  $\frac{\exp \eta t - 1}{\eta}$ , pour  $\eta \rightarrow 0_+$ . On a aussitôt, pour tout  $m \geq 0$ ,

$$t^m = \lim_{\eta \rightarrow 0_+} \left( \frac{\exp \eta t - 1}{\eta} \right)^m = \lim_{\eta \rightarrow 0_+} \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^{m-s} C_m^s}{\eta^m} \exp(s \eta t).$$

Ainsi, chaque  $P_j(t) \exp(\zeta_j t)$  va être limite uniforme sur  $[0, 1]$  d'une famille de fonctions de la forme

$$\sum_{s=0}^{p_j} a_{j,s}(\eta) \exp(s \eta + \zeta_j) t,$$

qui pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , possède au plus  $p_j + 1$  termes ; ce qui pour  $\psi(\cdot, \zeta)$  donnera  $\sum_{j=1}^n p_j + n$  termes et aboutira, par limite uniforme, à

$$\|f_\varepsilon - \psi(\cdot, \zeta)\|_\infty \geq \frac{C_l}{\left(n + \sum_j p_j\right)^l}.$$

✓

**Remarque 7.** — On peut bien sûr prolonger le résultat sur tout intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  (à condition qu'il soit compact pour assurer la convergence uniforme de  $\frac{\exp(\eta t) - 1}{\eta}$  vers  $t$ ).

On a alors un résultat qui pourrait s'appliquer dans le cadre de notre problème inverse. L'inconvénient est qu'ici aussi la minoration est trop faible : en effet, la formule de type Gelfand-Levitan possède en tant que déterminant tous les

$$\exp 2(b_1\zeta_1 + \cdots b_N\zeta_N), \quad b_j \in \{-1, 0, 1\},$$

qui sont au nombre de  $3^N$ , sans compter ceux qui ont une partie polynomiale, ce qui ne donnera pas mieux que  $\frac{C}{3^N}$ , qui est déjà insuffisant.

En revanche, l'avantage ici est qu'on n'a pas besoin de borner les variables  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ . Ainsi de deux choses l'une : soit la proposition 4 peut être nettement améliorée afin d'obtenir une estimation voisine de celle donnée dans le théorème 1. Soit au contraire elle n'est pas loin d'être optimale, et la comparaison avec l'estimation en  $\frac{1}{(N \log N)^r}$  montre que c'est alors pour des grandes valeurs des paramètres  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  (donc au-delà de la taille polynomiale) que l'approximation est meilleure.

De plus, la fonction  $f_\varepsilon$  est complètement explicitée, et ne dépend pas de la famille exponentielle imposée au départ. Elle se trouve ainsi uniformément distante de toutes les familles exponentielles à  $n$  termes. Ceci mis à part, le résultat donné par le théorème 1 est préférable pour la précision de l'ordre de  $\frac{1}{(N \log N)^{\frac{1}{s}}}$ , et pour sa forme plus générale qui ne concerne pas seulement les familles exponentielles, mais toutes les fonctions entières de type exponentiel.

## Références

- [1] K. Chadan, P. C. Sabatier, *Inverse problems in quantum scattering theory*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [2] M. V. Fedoryuk, *Asymptotic methods for linear ordinary differential equations*, Nauka, Moscow, 1983 (Russian) ; traduction française in Editions MIR, Moscow, 1987.
- [3] I. M. Gelfand, B. M. Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. **15** (1951), 309–360 ; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. (2) **1** (1955).
- [4] B. Haas, *A simple counterexample to Kouchnirenko's conjecture*, Beiträge Algebra Geom. **43** (2002), no. 1, 1–8.
- [5] G. Henkin, N. N. Novikova, *The reconstruction of the attracting potential in the Sturm-Liouville equation through characteristics of negative discrete spectrum*, Stud. Appl. Math., **97** (1996), no. 1, 17–52.
- [6] L. D. Ivanov, *Variations of sets and functions* (Russian), edited by A. G. Vitushkin. Izdat. "Nauka", Moscow, 1975. 352 pp.
- [7] A. G. Khovanskii, *Fewnomials*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [8] A. N. Kolmogorov, V. M. Tihomirov,  $\varepsilon$ -entropy and  $\varepsilon$ -capacity of sets in function spaces, (Russian) Uspehi Mat. Nauk **14** (1959) no. 2 (86), 3–86 ; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) **17** (1961), 277–364.
- [9] P. D. Lax, C. D. Levermore, *The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation*, I–III, Comm. Pure Appl. Math. **36**:253–290, 571–593, 809–830 (1983).
- [10] B. M. Levitan, *Inverse Sturm-Liouville problems*, Nauka, Moscow, 1984 (English transl. VNU Science Press, Utrecht, 1987).
- [11] G. G. Lorentz, *Metric entropy and approximation*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 903–937.

- [12] V. A. Marchenko, *Spectral theory of the Sturm-Liouville operators*, Naukova Dumka, 1972 (Russian).
- [13] R. G. Novikov, *The  $\bar{\partial}$ -approach to approximate inverse scattering at fixed energy in three dimensions*, Int. Math. Res. Papers, 2005:**6** (2005), 287–349.
- [14] O. A. Oleinik, I. B. Petrovskii, *On the topology of real algebraic surfaces*, Izv. Akad. Nauk. Ser. Mat. **13** (1949), 389–402 ; English transl., Transl. Amer. Math. Soc. (1) **7** (1962), 399–417.
- [15] A. Pinkus, *n-widths in approximation theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [16] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1978.
- [17] H. S. Shapiro *Some negative theorems of approximation theory*, Michigan Math. J. **11** (1964), 211–217.
- [18] V. M. Tihomirov, *Diameters of sets in functional spaces and the theory of best approximations*, Uspehi Mat. Nauk **15** no. 3 (93), 81–120 (Russian) ; translated as Russian Math. Surveys **15** (1960) no. 3, 75–111.
- [19] A. G. Vitushkin, *Estimation of the complexity of the tabulation problem* (Russian), Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1959 ; English transl., *Theory of the transmission and processing of information*, Pergamon Press, New York-Oxford-London-Paris, 1961.
- [20] H. E. Warren, *Lower bounds for approximation by nonlinear manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **133** (1968), 167–178.
- [21] H. E. Warren *A construction of certain nonlinear approximating families*, Proc. Amer. Math. Soc. **21** (1969), 467–470.

---

30 janvier 2006

AMADEO IRIGOYEN, Université Paris VI - Pierre et Marie Curie, UMR 7586, 175, rue du Chevaleret  
75013 Paris • E-mail : amadeo@math.jussieu.fr